

Solution

1. Réponse: 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24.

2. • Parmi les nombreux (trente-deux) diviseurs de 1920 on trouve:

1, 2, 4, 8, 15, 30, 60, 120, 240, 480, 960 et 1920.

si	$n \in [960, 1919]$	alors	$n = 960 + m$	avec	$0 \leq m \leq 959$
si	$n \in [480, 959]$	alors	$n = 480 + m$	avec	$0 \leq m \leq 479$
si	$n \in [240, 479]$	alors	$n = 240 + m$	avec	$0 \leq m \leq 239$
si	$n \in [120, 239]$	alors	$n = 120 + m$	avec	$0 \leq m \leq 119$
si	$n \in [60, 119]$	alors	$n = 60 + m$	avec	$0 \leq m \leq 59$
si	$n \in [30, 59]$	alors	$n = 30 + m$	avec	$0 \leq m \leq 29$
si	$n \in [15, 29]$	alors	$n = 15 + m$	avec	$0 \leq m \leq 14$
si	$n \in [8, 14]$	alors	$n = 8 + m$	avec	$0 \leq m \leq 6$
si	$n \in [4, 7]$	alors	$n = 4 + m$	avec	$0 \leq m \leq 3$
si	$n \in [2, 3]$	alors	$n = 2 + m$	avec	$0 \leq m \leq 1$

Pour tout entier n compris entre 2 et 1919, le tableau précédent permet de trouver un m . En faisant jouer à m le rôle de n , et en recommençant, on finit par écrire n comme somme de diviseurs de 1920. Et ces diviseurs sont distincts car n et m ne sont jamais dans le même intervalle. Donc 1920 est bien un *nombre de Pozandis*.

- $1992 = 2^3 \times 3 \times 83$ donc les premiers diviseurs de 1992 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 83

Comme, $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 60$, l'entier 61 ne peut pas être égal à une somme de diviseurs *isolés* de 1992 qui n'est donc pas une année *de Pozandis*.

3. La démarche précédente suggère de tenter une puissance de 2.

La seule année puissance de 2 du XXI^{ème} siècle est $2^{11} = 2048$. Les diviseurs de 2048 sont:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 et 2048

On montre alors avec le même raisonnement que celui de la question précédente que 2048 est bien un *nombre de Pozandis*.

Remarque: Pour tout entier n de 1 à 2048, l'écriture binaire de n donne directement la somme des diviseurs isolés de 2048.

Quelques pistes proposées par la rédaction

Question 1

- Il semble difficile de procéder autrement que par essais. Mais ceux-ci peuvent, aussi, mettre en évidence un rôle qui semble important des séries de diviseurs 1 ; 2 ; 4 et 1 ; 2 ; 3. La série 1 ; 2 ; 4 se prolongeant déjà en 1 ; 2 ; 4 ; 8 et 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16, il apparaît la suite des puissances de 2.

- *Pourrions-nous obtenir des nombres de Pozandis en partant de suites de diviseurs ?*

Appelons cette suite un noyau, S toutes les sommes possibles de ses diviseurs isolés.

- **Le noyau 1 ; 2 ; 4** permet à S de couvrir tous les entiers de 1 à 7 et l'entier 8, qui suit, comporte les diviseurs 1 ; 2 ; 4 : il est un nombre de Pozandis.

- Pour essayer de couvrir par S davantage d'entiers, adjoignons 8 au noyau : le noyau 1 ; 2 ; 4 ; 8 permet à S de couvrir tous les entiers de 1 à 7 + 8 soit de 1 à 15 et le nombre 16, qui suit, comporte les diviseurs 1 ; 2 ; 4 ; 8 : il est un nombre de Pozandis.

- En recommençant le procédé on obtient bien ainsi toutes les puissances de 2. Par récurrence, on exploiterait l'assertion suivante :
à partir du noyau 2^0 ; 2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; ... ; 2^n couvrant tous les entiers de 1 à $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$ soit de 1 à $2^{n+1} - 1$ il apparaît le nombre de Pozandis 2^{n+1} .

• *Mais que se passe-t-il à partir d'autres noyaux ?*

- **le noyau 1 ; 2 ; 3** permet à S de couvrir tous les entiers de 1 à 6, et 6, le produit des diviseurs, est un nombre de Pozandis.
Adjoignons 6 à 1 ; 2 ; 3.

Le noyau 1 ; 2 ; 3 ; 6 permet de couvrir tous les entiers de 1 à 12 et ...
Adjoignons 12 au noyau : Etc.

Nous obtenons ainsi la suite : 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; ... soit $6 \times (2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; \dots)$.

• **Essayons le noyau 1 ; 2 ; 3 ; 4**

Ce noyau permet à S de couvrir tous les entiers de 1 à 10 mais il ne permet pas ainsi d'atteindre aussitôt un nombre de Pozandis : le plus petit multiple admettant ce noyau étant 12 et 11 n'étant pas « couvert ».

Mais 12 admettant aussi le diviseur 6, adjoignons celui-ci au noyau. Dès lors S couvre de 1 à 22 et 12 apparaît comme nombre de Pozandis.
Adjoignons-le au noyau ... Nous aurons le nombre de Pozandis 24.
Adjoignons 24 au noyau ... d'où 48. Adjoignons 48 ... Etc.

Nous obtenons une suite de nombres de Pozandis : $12 \times (2^1 ; 2^2 ; 2^4 ; \dots)$.

• **Conclusion**

En partant d'un noyau, nous pouvons atteindre des suites de nombres de Pozandis du type (avec n entier) : $n \times (2^1 ; 2^2 ; 2^4 ; \dots ; 2^n ; \dots)$.

Question 2

a) 1920 est-il un nombre de Pozandis ?

Essayons d'utiliser la conclusion précédente : 1920 admet-il des diviseurs 2^n ? (c'est-à-dire : 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; ...).

Oui, 1920 est divisible par 128. $1920 = 128 \times 15$, et, en dessous de 15, nous avons les diviseurs 2 ; 4 ; 8. Donc nous avons déjà la suite de diviseurs 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 15 ; 30 ; 60 ; 120 ; ... : 1920
qui, à partir de 15, utilisent le produit par des puissances de 2.

Pour le noyau 1 ; 2 ; 4 ; 8, S couvre de 1 à 15.

L'adjonction de 15 fait que S couvre de 1 à 30. Mais 30 n'est pas multiple de 8.

Patientons, avec l'adjonction de 60, puis de 120 qui, lui, est multiple de 8.
Le noyau 1 ; 2, ; 4 ; 8 ; 15 ; 30 ; 60 ; 120 donne 120 comme nombre de Pozandis.

Et dès lors, s'enclenche la suite des nombres de Pozandis : 120, 240, ..., 1920.

b) Et 1992 ?

La considération des noyaux facilite peut-être la compréhension d'une intervention « naturelle » du contre-exemple à partir des premiers diviseurs.

Commentaires de l'équipe académique

« Il ressort de l'impression générale que les sujets étaient bien choisis et permettaient d'établir un classement net parmi les candidats. Ceux-ci ont été très intéressés.

Le sujet propre à l'académie de Besançon (troisième exercice : nombres de Pozandis) a été le discriminant majeur : il serait bon que la commission nationale se penche attentivement sur toute la finesse du raisonnement attendu et des réponses étonnantes données en particulier par le candidat classé premier : il a fait part d'une grande imagination agrémentée d'une grande qualité dans son souci de nous faire comprendre la trame de son raisonnement. Notons simplement que le même candidat pense que le diamètre d'un cercle est égal à πR^2 , erreur commise à plusieurs reprises (et peut-être par trop significative !) que nous lui avons pourtant pardonnée. »

Déroulement de l'épreuve, palmarès

136 candidats étaient inscrits (95 garçons et 41 filles)

98 ont composé (69 garçons et 29 filles) : diverses manifestations sportives et culturelles sont venues en concurrence ; au dire de certains collègues, des candidats sérieux ont été absents.

14 des 36 lycées de l'Académie ont été représentés

25 copies ont été classées (17 garçons et 8 filles).

« Les membres du jury ont eu un réel plaisir à lire des idées très intéressantes, voire géniales. Quel plaisir pour nous.

La correction a été aussi l'occasion rêvée de pratiquer la double et parfois quadruple correction... et de constater qu'une double correction ne suffit pas parfois (une candidate classée finalement 6^{ième} avait été écartée après une première double correction !).

La cellule fonctionne en comité restreint (4 à 6 membres) mais le travail est très efficace et nous apporte de réelles satisfactions dans la confrontation de nos exigences et de nos pratiques.

L'épreuve semble avoir trouvé son rythme. Le chiffre de participation est en forte progression (on passe de 71 puis 77 à 98 participants, soit une augmentation de près de 30% !...). Mais encore trop peu d'établissements (14 sur 36) envoient des candidats. Des lycées réputés dans l'académie n'ont toujours pas envoyé de candidats après trois années ! L'information a du mal à passer malgré une très forte implication de nos I.P.R.. Il semble que le blocage en réalité se situe aux niveaux administrations des lycées / professeur coordonnateur / professeur. Quel dommage ! »

Palmarès (début)

Premier prix : Baptiste BOILEY, lycée Duhamel (Dôle)

Deuxième prix : Arnaud RAMEY, lycée Nodier (Dôle)

Troisième prix : Fabien LOI, lycée Nodier (Dôle)

Les premières filles sont 4^{èmes} (deux sur trois ex-aequo).