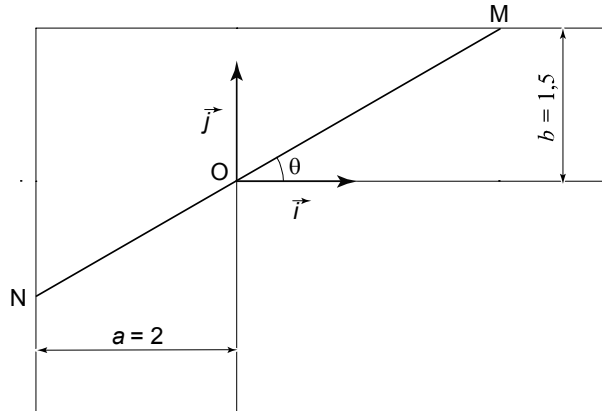


Solution 1



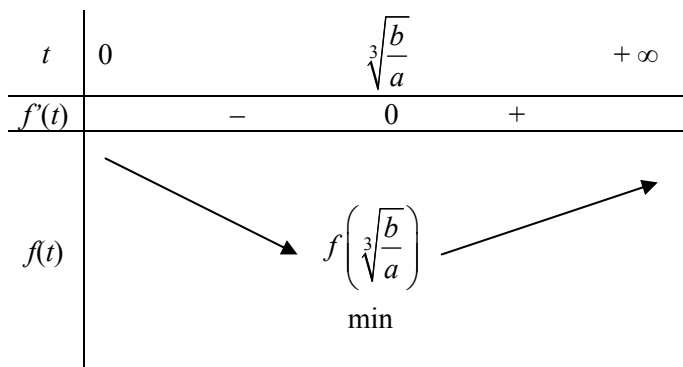
Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, la droite (MN) qui pivote autour du point O a pour équation $y = tx$ (avec $t > 0$).

$$M\left(\frac{b}{t}, b\right), N(-a, -at), \overline{NM}\left(\frac{b}{t} + a, b + at\right)$$

$$MN^2 = \frac{(b + at)^2}{t^2} + (b + at)^2 = \frac{(at + b)^2 (t^2 + 1)}{t^2}.$$

$MN > 0$, donc le minimum de MN correspond au minimum de

$$f(t) = \frac{(at + b)^2 (t^2 + 1)}{t^2} ; f'(t) = \frac{2(at + b)(at^3 - b)}{t^3}$$



Le minimum de f sur $]0, +\infty[$ est

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

$$MN \min = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Pour $a = 2$ m et $b = 1,5$ m, on a $MN \min = \left(2^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

La planche a, au plus, la longueur $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. $MN \approx 4,933$ m.

La longueur maximale de la planche est 4,93 m.

$$\theta = \arctan \left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right) \approx 42^{\circ},257.$$

Remarque : les précisions sont illusoires : notre modélisation ne tient pas compte de l'épaisseur de la planche ! il faudra rester au-dessous de 4,93 m ...

Solution 2

$$MN = MO + ON = \frac{1,5}{\sin \theta} + \frac{2}{\cos \theta}$$

[MN] passe de justesse pour une certaine valeur de θ , soit θ° . Avant et après, on pourrait « étirer » MN !

Il n'est donc pas utile de faire un tableau de variation (facile au demeurant) : MN est minimum pour θ° et, pour avoir θ° , il suffit d'annuler la dérivée de MN par rapport à θ .

$$\text{Or } (MN)' = \frac{1,5 \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{3 \cos^3 \theta - 4 \sin^3 \theta}{2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}.$$

$$\text{D'où, pour } \theta^{\circ} : \tan^3 \theta^{\circ} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \tan \theta^{\circ} \approx 0,908\,560 \dots$$

Cela donne $\theta^{\circ} \approx 0,737\,524 \dots$ (radians), $\theta^{\circ} \approx 42^{\circ},257\,039 \dots$

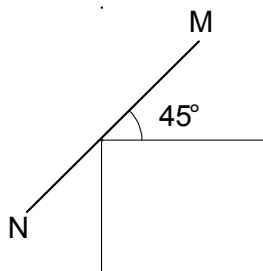
D'où MN (qui peut aussi se calculer sans θ° , avec $\cos \theta^{\circ}$ et $\sin \theta^{\circ}$ à partir de $\tan \theta^{\circ} \dots$).

Commentaires

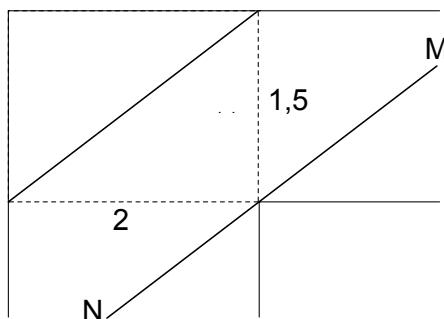
De l'équipe académique

La plupart des candidats ont raisonné sur un des deux cas particuliers suivants :

1°)



2°)



(MN) // diagonale du rectangle

Ils n'ont pas semblé voir que la longueur MN est fonction d'une variable.

Des rédacteurs de la brochure

- Cet exercice est intéressant, avec sa jolie modélisation simple. Pour la solution 2, la réduction immédiate de MN au même dénominateur alourdissait les calculs ... Ce qui invite à contrôler les réflexes calculatoires.
- Comment s'assurer que la réponse est fournie à 1 cm près ? En traînant beaucoup de décimales ? ou avec des encadrements ?
- L'angle θ° est voisin de 45° , ... et d'autant plus que a et b (notations de la solution 1) sont voisins, avec $\theta^\circ = 45^\circ$ pour $a = b$, ce qui est alors « évident » pour des raisons de symétrie...

Déroulement de l'épreuve et palmarès

« Malgré une participation beaucoup plus importante que l'an dernier, avec 266 candidats inscrits et 190 participants effectifs (soit 71%), il n'y a pas de copie qui tranche nettement cette fois-ci.

Après une première sélection de 15 copies, nous avons choisi les trois candidats suivants » :

1- Louis KLEPAL	Lycée Marie Curie	Nogent-s/-Oise
2- Guillaume JOURNAUX	Lycée Madeleine Michelis	Amiens
3- Guillaume ESCAMOCHER	Lycée du Saint Esprit	Beauvais