

# ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE

Mat et Matix s'amuse avec le jeu suivant :

Pour toute la durée du jeu, ils se fixent un nombre entier  $n \geq 2$ . A chaque tour, ils tirent au sort deux nombres entiers distincts et strictement positifs  $x$  et  $y$ . Ils essayent, en partant de  $x$ , d'arriver à  $y$ , en plusieurs étapes, avec la contrainte suivante :

- A une certaine étape, si  $z$  est le nombre initial ou le nombre obtenu à l'étape précédente, on peut seulement ajouter  $n$  à  $z$ , soustraire  $n$  à  $z$ , multiplier  $z$  par  $n$ , ou diviser  $z$  par  $n$ .

Si au bout de  $m$  étapes on obtient  $y$ , on dit que le passage de  $x$  à  $y$ , à l'aide de  $n$ , est réalisable en  $m$  étapes.

Pour mieux comprendre, prenons par exemple  $n = 3$ ,  $x = 5$  et  $y = 63$ . Nous pouvons faire alors  $5 \times 3 = 15$ , puis  $15 + 3 = 18$ , puis  $18 + 3 = 21$  et enfin  $21 \times 3 = 63$  et donc le passage de 5 à 63, à l'aide de 3, est réalisable en 4 étapes.

1°) Donner un passage de 15 à 16, à l'aide de 2, en 3 étapes, puis un passage de 168 à 126 à l'aide de 7, en 4 étapes.

2°) Prouver que, si le passage de  $x$  à  $y$  à l'aide de  $n$  est réalisable en  $m$  étapes, le passage de  $y$  à  $x$ , à l'aide de  $n$ , est aussi réalisable en  $m$  étapes.

3°) Prouver que le passage de  $x$  à  $y$ , à l'aide de  $n$ , est toujours réalisable.