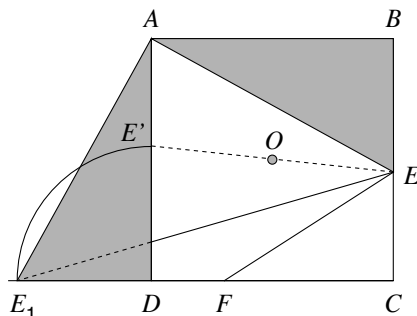


Elément de solution

(fourni par l'équipe académique)

« Le périmètre du triangle CFE se trouve être le demi-périmètre du carré. La figure ci-dessous indique comment on peut tenir compte, par une symétrie adaptée, de cette particularité. »



Développement possible - par Henri BAREIL - :

Effectivement la symétrie par rapport à O puis le rabattement de $[DE']$ en $[DE_1]$ fournissent :

- d'une part : $CE + CE_1 = 2a$ (1)

- d'autre part : la correspondance des triangles grisés dans une rotation $(A, 90^\circ)$ (2).

On peut, d'ailleurs, remplacer l'utilisation de cette rotation par celle de l'égalité des triangles grisés (2^{ème} cas d'égalité, ...)

On déduit de la conjugaison de (1) et de (2), que $CE + CE_1 = 2a$,

donc

$$FE = FE_1$$

ce qui, compte tenu de $AE = AE_1$, équivaut à « (AF) est la médiatrice de $[EE_1]$ ».

La rotation (2) (ou, à défaut, l'exploitation de l'égalité des triangles grisés et de leur position) implique aussi que EAE_1 est un triangle rectangle isocèle.

(FA) est donc la bissectrice de $\widehat{BAE_1}$ et de $\widehat{EAD}$.

De là : d'une part l'appartenance de F à $]CD[$, et, d'autre part, $\widehat{EAF} = 45^\circ$.

D'où la construction, et l'unicité, de F , soit avec la médiatrice de $[EE_1]$, soit avec $\widehat{EAF}$.

SOLUTION 2

par Henri BAREIL

(Cette solution n'est pas meilleure que la solution 1 !)

Centrons notre attention sur le triangle CFE , de périmètre $2a$.

Nous allons exploiter des considérations de géométrie élémentaire, relatives aux cercles ex-inscrits dans un triangle dans un triangle, qui permettent l'intervention du demi-périmètre de CFE .

Rappelons-les :

Soit un triangle LMN (figure ci-contre) et le centre J du cercle ex-inscrit dans l'angle A .

$$MS = MP, NS = NT,$$

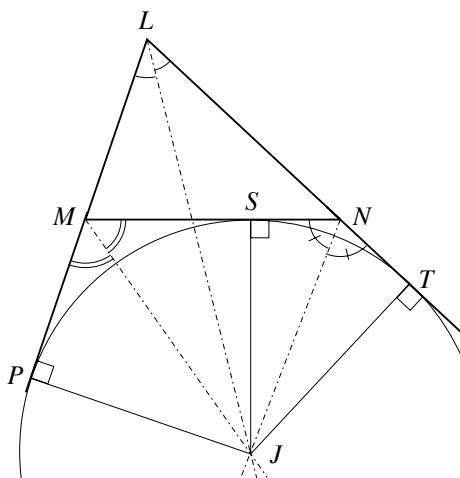
$$LF = LT$$

(propriétés des tangentes)

Donc $LP = LT =$ demi-périmètre de LMN .

D'autre part :

$$\widehat{MJN} = \frac{1}{2} \widehat{PJT}$$



Exploitions-les pour CFE :

Comme $CD = CB =$ demi-périmètre de CFE , D et B sont les points de contact des demi-droites $[CF)$ et $[CE)$ avec le cercle ex-inscrit dans $\widehat{C}$.

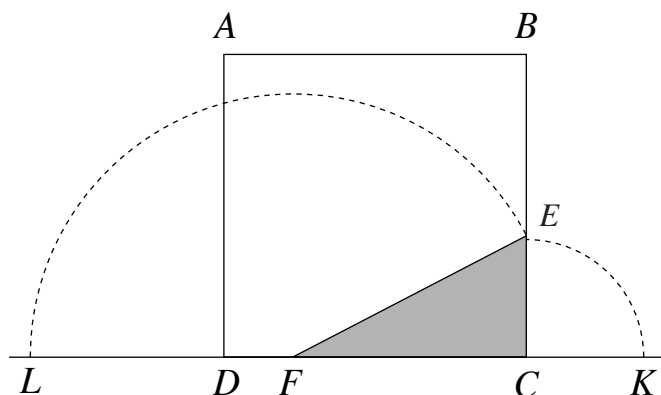
Le centre de ce cercle est donc A . Il s'ensuit que ce cercle (A, AB) est tangent à (EF) et que $\widehat{EAF} = \frac{1}{2} \widehat{BAD}$.

La construction et l'unicité de F s'en déduisent : tracer, de E , la tangente - autre que (EB) - au cercle (A, AB) .

On peut aussi utiliser le fait que (EF) et (EB) sont symétriques par rapport à (AE) .

SOLUTION 3

par Henri Bareil



Utilisons le classique déploiement du périmètre du triangle CEF , ici sur (CD) , autour de $[CF]$:

Soit K tel que $CK = CE$, K extérieur à $[CD]$ et L sur $[CD]$ tel que $FL = FE$.

Alors $LK = 2a$.

Or, la connaissance de E induit celle de K . Et L est donc, également, connu.

Comme $FE = FL$, F est l'intersection de (CD) et de la médiatrice de $[EL]$.

De plus, $DL + CK = a$

donc $DL < a$.

Or $DE > a$, donc $DE > DL$.

Il s'ensuit que la médiatrice de $[EL]$ coupe bien $]DC[$.

Remarques :

1 - Le point L de cette « Solution 3 » n'est autre que le point E_1 de la « Solution 1 ».

2 - Le déploiement du périmètre de CEF sur (EC) , autour de $[CE]$, n'était pas, semble-t-il, intéressant : aucune des extrémités du périmètre déployé n'est connue.

SOLUTION 4

par Henri BAREIL

Essayons une solution algébrique.

On pose, par exemple, $CE = m$, avec $0 < m < a$ et on se propose de déterminer CF

($= x$) tel que $m + x + \sqrt{x^2 + m^2} = 2a$

Soit $\sqrt{x^2 + m^2} = 2a - m - x$

équation équivalente, sous la condition $x < 2a - m$, à $x = \frac{2a(a-m)}{2a-m}$, qui remplit bien la condition de départ, et, de plus, $0 < x < a$.

D'où F , unique, sur $]CD[$.

• La recherche de l'angle $\widehat{EAF}$ apparaît plus compliquée. Elle peut se faire par la formule d'Al-Kashi, ce qui impose :

$$x^2 + m^2 = [a^2 + (a-x)^2] + [a^2 + (a-m)^2] - 2\sqrt{[a^2 + (a-x)^2][a^2 + (a-m)^2]} \cos \widehat{EAF}$$

soit encore, après calculs, dont l'utilisation de la valeur de x :

$$2\sqrt{\frac{2a^2(2a^2 - 2am + m^2)^2}{(2a-m)^2}} \cos \widehat{EAF} = 2a \frac{2a^2 - 2am + m^2}{2a-m}$$

d'où l'on peut déduire $\cos \widehat{EAF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ce qui donne $\widehat{EAF} = 45^\circ$.

Ouf!

• Cette méthode de résolution est, pour ce problème-là, plutôt fastidieuse. De plus, elle ne permet une construction simple de F que quand on dispose de la mesure de $\widehat{EAF}$.

Mais elle peut dépanner les élèves à court de méthodes « géométriques » et sûrs en calcul algébrique.

SOLUTION 5

par Paul-Louis HENNEQUIN

Posons $BE = b$ et $DF = x$.

Par Pythagore $EF = \sqrt{(a-b)^2 + (a-x)^2} = 2a - FC - EC$
 $= (a - FC) + (a - EC) = x + b.$

d'où $(a-b)^2 + (a-x)^2 = x^2 + 2bx + b^2$

ou $2a^2 - 2ab = 2x(a+b)$

ou $x = \frac{a(a-b)}{a+b}$

D'où $\tan \widehat{DAF} = \frac{x}{a} = \frac{a-b}{a+b}$ et $\tan \widehat{EAB} = \frac{b}{a}$

Alors

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{DAF} + \widehat{EAB}) &= \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a} \right) / 1 - \frac{(a-b)b}{a(a+b)} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 1\end{aligned}$$

d'où $\widehat{DAF} + \widehat{EAB} = 45^\circ$

et $\widehat{EAF} = 45^\circ$.

COMMENTAIRES

par l'équipe de rédaction de la brochure

1 - On devrait accepter une preuve de l'existence de F sur $]DC[$ par un raisonnement de type suivant :

Soit F en D :

Alors $DE > a$ et le périmètre du triangle CFE est strictement supérieur à $2a$.

Soit F en C :

Alors le périmètre du triangle CFE , égal à $2CE$ est strictement inférieur à $2a$.

Si l'on déplace F sur $]DC[$, de D vers C par exemple, le périmètre de CFE est une fonction continue décroissante de CF .

Il existe donc, sur $]DC[$, une position de F et une seule, telle que le périmètre de ECF soit égal à $2a$.

2 - Une telle discussion initiale facilite une rédaction rigoureuse des solutions.

3 - On peut regretter la notation $]DC[$ qui, semble-t-il, n'est plus aux programmes des Collèges, ni de Seconde et Première. Elle aura pu gêner des candidats, voire induire des contre-sens.

4 - Cela étant, il s'agit d'un joli problème de géométrie, accessible de diverses façons, le « Solution 3 » étant peut-être la plus classique... et la plus courte !

PALMARÈS

863 candidats, de 81 lycées étaient inscrits. 604, de 78 lycées, ont composé.

Voici leur répartition :

427 garçons et 156 jeunes filles de Première S

7 garçons et 1 jeune fille de Première S.T.I.

13 candidats « mal identifiés ».

L'équipe académique a décerné :

- deux premiers prix, deux deuxièmes prix, trois troisièmes prix et quinze accessits.