

## SOLUTION

L'idée réécrite de la méthode est de constater que la racine de 13 est de la forme  $(3 + \alpha)$ ,  $\alpha$  étant à chercher par une succession d'opérations.

On écrit  $(3 + \alpha)^2 = 13$

et dans le développement de la parenthèse :  $9 + 6\alpha + \alpha^2 = 13$ .

On néglige  $\alpha^2$  d'où une première égalité :  $9 + 6\alpha = 13$ ,

et on obtient 
$$\alpha_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

On réintroduit la valeur trouvée dans l'égalité  $6\alpha + \alpha^2 = 4$ ,

mais pour partie « seulement » en écrivant :  $\left(6 + \frac{2}{3}\right)\alpha = 4$

d'où une valeur 
$$\alpha_2 = \frac{3}{5}$$

et ainsi de suite, on obtient la suite des nombres du texte, la valeur demandée dans

le texte étant 
$$\alpha_4 = \frac{66}{109}.$$

- On passera ici l'application à un autre nombre...
- Les questions auxquelles on pouvait penser étaient liées, bien entendu, à l'approximation, à la convergence des suites, éventuellement à la vitesse de convergence...  
A dire vrai il y a eu peu de questions !

## COMMENTAIRE de François Lo JACOMO

Je trouve intéressant de confronter les élèves à un texte mathématique ancien, montrant à quel point les notations algébriques peuvent clarifier l'expression.

Parmi les questions possibles, outre bien évidemment la notion de suite et de convergence géométrique (chaque terme est au moins deux fois plus près de la racine carrée que le précédent, alternativement supérieur et inférieur à la racine carrée), le procédé est-il utilisable tel quel, quel que soit le nombre de départ ? Si le nombre

$n$  de départ est un entier, les approximations ainsi obtenues sont-elles les meilleures approximations rationnelles de  $n$  ?

Car enfin, même si cela dépasse le niveau de Première, il me semble possible de remarquer que cette méthode introduit implicitement le développement d'une fonction en fraction continuée.

En effet, la première approximation proposée ( $a^2 + x$ ) est  $a + \frac{x}{2a}$ ,

la seconde :  $a + \frac{x}{2a + \frac{x}{2a}}$ ,

la troisième :

$$a + \frac{x}{2a + \frac{x}{2a + \frac{x}{2a}}}$$

et ainsi de suite ...

Une des questions à laquelle on pouvait aussi penser était : existe-t-il d'autres fonctions de la racine carrée qui se développent simplement en fraction continuée ? ... ou en fraction du type :

$$x/(1 - x^2/(3 - x^2/(5 - x^2/(7 - x^2/ \dots)))) = \tan x.$$