

SOLUTION 1

Paul-Louis HENNEQUIN

Posons : $N = 1 - 10^{-1000} = X^2$ avec $X > 0$, puis $X = 1 - \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$.

Alors : $X^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2$ et $2\alpha - \alpha^2 = 10^{-1000}$ ou $\alpha(2 - \alpha) = 10^{-1000}$.

$$2 - \alpha > 1 \text{ implique } \alpha = \frac{10^{-1000}}{2 - \alpha} < 10^{-1000}$$

$$\text{donc } \frac{\alpha^2}{2} < \frac{10^{-2000}}{2}$$

$$\text{de } \alpha = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{10^{-1000}}{2} \text{ on déduit } \frac{10^{-1000}}{2} < \alpha < \frac{10^{-1000}}{2} + \frac{10^{-2000}}{2}$$

$$\text{d'où } 0,9\dots\dots 949\dots\dots 95 = 1 - 5 \times 10^{-1001} - 5 \times 10^{-2001} < X < 1 - 5 \times 10^{-1001}$$

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\
1000 & 999 & \\
\text{neufs} & \text{neufs} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
& & 1000 \\
& & \text{neufs}
\end{array}
= 9,9\dots\dots 95$$

X a donc pour 2 000 premières décimales : 9.....9 4 9.....9

$$\begin{array}{cc}
\underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
1000 & 999
\end{array}$$

SOLUTION 2

par Daniel REISZ

(Dans le texte ci-après, le N de l'énoncé est remplacé par n)

Etude expérimentale et émission d'une conjecture

Avec une calculatrice, si on considère les nombres n de la forme $0.99\dots 9$ avec k décimales, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{0.9} &= 0.948\dots &\approx 0.95 \\
 \sqrt{0.99} &= 0.99498\dots &\approx 0.9950 \\
 \sqrt{0.999} &= 0.9994998\dots &\approx 0.999500 \\
 \sqrt{0.9999} &= 0.999949998\dots &\approx 0.99995000 \\
 \sqrt{0.99999} &= 0.9999949998\dots &\approx 0.9999950000
 \end{aligned}$$

où la première colonne de résultats représente les $2k$ premières décimales et la seconde, l'approximation à 10^{-2k} près.

On peut donc raisonnablement émettre la conjecture suivante :

- les 2000 premières décimales de $\sqrt{n}$ sont : 1000 chiffres 9, suivis d'un 4, suivi de 999 chiffres 9 ;
- l'approximation à 10^{-2000} près de $\sqrt{n}$ est le nombre $0.999\dots95000\dots0$, c'est-à-dire 1000 chiffres 9, un 5, suivi de 999 chiffres 0.

Une démonstration

L'idée de base consiste à écrire $n = 0.999\dots9$ (1000 décimales) sous la forme :

$$n = 1 - 10^{-1000} = 1 - \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 10^{-1000}$$

Alors $\sqrt{n} = \sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \alpha$ où α est « petit »

Observons alors que $(1 - \alpha)^2 = 1 - \varepsilon$ fournit $1 - 2\alpha + \alpha^2 = 1 - \varepsilon$

$$\text{soit encore} \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{2} + \alpha^2 \quad (\text{R})$$

Comme α est « petit », α^2 est « petit au carré » et on peut donc raisonnablement poser :

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$$

On retrouve ainsi l'approximation classique, mais non connue d'un élève de première,

$$\sqrt{1 - \varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } \varepsilon \text{ petit}$$

et $1 - \frac{\varepsilon}{2}$

fournit l'approximation : $\sqrt{n} \approx 0.999\dots95$ avec 1000 chiffres 9 suivis d'un 5.

Cherchons maintenant à préciser la qualité de cette approximation et, ainsi, à justifier les conjectures émises plus haut. La relation (R) montre que l'approximation de $\sqrt{1 - \varepsilon}$ par $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ est une approximation par excès.

Essayons donc de majorer $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sqrt{1 - \varepsilon}$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sqrt{1 - \varepsilon} &= \frac{\left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sqrt{1 - \varepsilon}\right] \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \sqrt{1 - \varepsilon}\right]}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \sqrt{1 - \varepsilon}} \\ &= \frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \sqrt{1 - \varepsilon}} \leq \frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{\varepsilon^2}{8\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \leq \frac{\varepsilon^2}{7} \leq 10^{-2000} \end{aligned}$$

Cela permet d'abord d'affirmer que *l'approximation* trouvée à l'aide de $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ est une approximation à 10^{-2000} près. Mais l'étude expérimentale initiale, à l'aide de la calculatrice, nous met la puce à l'oreille : les 2000 premières décimales de $\sqrt{n}$ ne sont pas 1000 chiffres « 9 », un « 5 » et 999 chiffres « 0 », mais devraient être 1000 chiffres « 9 », suivis d'un « 4 », suivi de 999 chiffres « 9 » :

0,999...994999...999

Ceci est par ailleurs justifié au plan théorique par le fait que l'approximation de $\sqrt{n}$ par $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ est une approximation par excès.

COMMENTAIRE GÉNÉRAL

Le sujet est joli mais le travail sur des approximations toujours délicat.

Il aurait été intéressant de connaître le corrigé proposé par le jury académique et, plus encore, les réactions des candidats et leurs prestations.