

SOLUTION

Pour une somme n ($n > 2$), les nombres obtenus se terminant tous par 1 ou 2, on peut donc les regrouper en deux sous-ensembles qui forment une partition de l'ensemble à dénombrer. Or, il y a autant de nombres se terminant par 1 que de nombres obtenus par une somme $n - 1$, à savoir S_{n-1} et il y a autant de nombres se terminant par 2 que de nombres obtenus par une somme $n - 2$, à savoir S_{n-2} . Donc $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ (on reconnaît la suite de Fibonacci). En calculant S_1 et S_2 , les élèves devraient arriver, de proche en proche, à S_{11} .

Remarque : la relation $S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$ valable pour tout

$n \geq 1$ ($S_0 = 1$, puisqu'avec 0 euro, on obtient un nombre : 0) et qui s'obtient en passant par l'équation caractéristique fournie par la relation de récurrence et en tenant compte des valeurs initiales, est inaccessible aux élèves !

COMMENTAIRE

La loi de formation des nombres ne prédispose pas à s'intéresser particulièrement au seul dernier chiffre de S_n .

Peut-être pourrait-on aussi remarquer que l'on obtient S_n avec adjonction d'un euro à partir de S_{n-1} et de deux euros à partir de S_{n-2} . Donc on devrait retrouver S_{n-1} et S_{n-2} dans S_n en supprimant 1 ou (exclusif) 2 dans chaque nombre. pour faire jouer l'ex-

clusivité, on supprime 1 ou 2 **au même emplacement**, que ce soit le dernier chiffre, ou l'avant-dernier, ou ...

Tout cela ne semble pas s'imposer d'emblée.

L'exercice relève alors de la bonne démarche scientifique : expérimentons, essayons !

Laissons S_0 fort artificiel, mais formons les $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ (nous avons déjà le S_5).

La suite de Fibonacci apparaît alors naturellement, d'autant que cette suite devrait bien faire partie de la culture d'un élève de Première...

Une question : que dire d'une copie où, des exemples initiaux, on induit sans autre explication $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ pour en déduire S_{11} ?