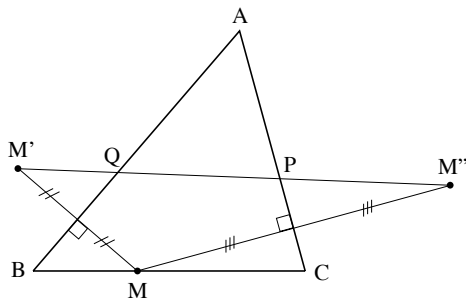


# SOLUTION

*Ce problème peut se résoudre par des symétries axiales.*

Soit  $M'$  le symétrique de  $M$  par rapport à  $(AB)$  et  $M''$  le symétrique de  $M$  par rapport à  $(AC)$ .



On a alors :  $MP + PQ + QM = M''P + PQ + QM'$  et ce trajet est minimal si et seulement si  $M', P, Q$  et  $M''$  sont alignés.

Le triangle  $AM'M''$  est isocèle ( $AM = AM' = AM''$ ) et l'angle  $\widehat{M'AM''}$  est constant (égal au double de l'angle  $\widehat{BAC}$ ).

$M'M''$  est donc minimal si et seulement si  $AM'$  l'est, ce qui est équivalent à  $AM$  minimal donc à  $M$  pied de la hauteur issue de  $A$ .

De la même façon,  $P$  et  $Q$  sont les pieds des hauteurs issues de  $B$  et  $C$  respectivement.

En conclusion, le trajet est minimal si et seulement si  $M, P$  et  $Q$  sont les pieds des

trois hauteurs du triangle  $ABC$ .

## COMMENTAIRES

1. La méthode proposée n'est évidemment pas la seule : cf. par exemple, celle indiquée par Brigitte SÉNÉCHAL dans son livre « *Groupes et géométries* »\* mais cette méthode semble, et de loin, la plus simple. Sa méthode de base : déployer le triangle  $MPQ$ , en ses côtés, selon un seul segment. Il s'agit vraiment d'une « méthode » ! S'en souvenir !

2. Le triangle  $MPQ$  de périmètre minimal reçoit l'appellation de « triangle orthique » de  $ABC$ .

On démontre aisément que l'orthocentre de  $ABC$  est le centre du cercle inscrit dans le triangle orthique (ou d'un cercle ex-inscrit, si  $ABC$  a un angle obtus).

3. L'énoncé indique clairement qu'il s'agit d'un « problème de FAGNANO », résolu par ce mathématicien.

Ce problème était, naguère, ultra-classique : il commençait la généralisation du célèbre problème, souvent « habillé » :  $A$  et  $B$  sont dans un même demi-plan de frontière  $\Delta$ . Où choisir  $M$ , sur  $\Delta$ , pour que  $MA + MB$  soit minimale ?

Le choix d'un problème classique, pour les Olympiades, a des inconvénients : des candidats le connaissent ..., est-ce encore, pour eux, un « problème » ?

Il a aussi des avantages si (et seulement si ?) l'on regarde d'autres concours, tels les Olympiades Internationales : il incite les candidats à cultiver des « classiques », ce qui leur donne un capital de base d'autant plus intéressant qu'ils sauront appréhender des méthodes...

Au comité de pilotage des Olympiades de Première d'en débattre !

Mais peut-être ce débat n'a-t-il pas lieu d'être : le jury académique de Paris signale que « très peu de copies ont abordé cet exercice »...

---

\* N.D.L.R. : Brigitte Sénéchal : « *Groupes et géométries* »

Ed. Hermann - 1979 - pages 40-41.

Sa méthode utilise - Cf. figure ci-après - une succession de rabattements et l'égalité

qui s'ensuit :  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_2A_2}$ .

D'où la figure finale :

