

SOLUTION

- 1) • L'application de la propriété a) donne $18 \in \mathbb{E}$.
• L'application de la propriété b) donne $2 - 2 = 0$, donc $0 \in \mathbb{E}$.
• Peut-on atteindre rapidement 2002 par $2x^3 + 2$?
Oui pour $x = 10$.
Reste donc à savoir si $10 \in \mathbb{E}$.
Comme $18 \in \mathbb{E}$ et $2 \in \mathbb{E}$, par b) : $18 - 2 \in \mathbb{E}$, soit $16 \in \mathbb{E}$.
De même $16 - 2$, $14 - 2$, $12 - 2$, et voilà : $10 \in \mathbb{E}$.
Donc $2002 \in \mathbb{E}$.
- 2) Soit p un élément de $\mathbb{E}$.
L'application de b) donne $p - p = 0$, $0 \in \mathbb{E}$.
En appliquant a) à 0, on obtient $2 \in \mathbb{E}$, ce qui ramène à la question 1.

COMMENTAIRES

- 1) L'ensemble énoncé-solution nous a été aimablement communiqué par Abderrahim OUARDINI qui précise ceci :
- « J'avais soumis ce problème au comité d'Olympiade sous la version originale :
- « Soit $\mathbb{E}$ une partie non vide de l'ensemble des entiers naturels qui vérifie les propriétés suivantes :
- i) Si $x \in \mathbb{E}$, alors $2x^3 + 2 \in \mathbb{E}$.
ii) Si $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$ avec $x \geq y$, alors $x - y \in \mathbb{E}$.
A-t-on $2002 \in \mathbb{E}$? Justifiez votre réponse. »

Une intéressante discussion a montré que les candidats pourraient se heurter à la difficulté, $\mathbb{E}$ étant non vide, de nommer un élément de $\mathbb{E}$, et d'utiliser la condition ii) pour un choix adéquat de x et y ; ce qui permet de montrer que 0 appartient à $\mathbb{E}$...».

2) Voilà un sujet original, simple, astucieux...

3) Abderrahim OUARDINI nous a également envoyé les deux textes ci-après (nous l'en remercions vivement).

COMPORTEMENT DES CANDIDATS

C'était le problème le plus abordé et le mieux réussi avec 44,2% (éventuellement quelques copies comportant parfois des défauts mineurs) et qui a permis à plusieurs élèves de mettre en évidence des qualités de raisonnement (recherche, tâtonnement, ...). Certains ont résolu l'équation $2x^3 + 2 = 2002$ pour, enfin, découvrir l'écriture $2002 = 2 \times 10^3 + 2$. D'autres ont montré que $11\,666 \in \mathbb{E}$ pour conclure que tous les nombres pairs compris entre 0 et 11 666 appartiennent à $\mathbb{E}$.

Un candidat, pour la question 2) a raisonné de la manière suivante : « On nomme A un élément (non précisé) de $\mathbb{E}$. On a : $2A^3 + 2 \in \mathbb{E}$, donc :

$$2A^3 + 2 - A \in \mathbb{E}, (2A^3 + 2 - A) - A \in \mathbb{E}, \dots, 2A^3 + 2 - nA \in \mathbb{E},$$

pour tout entier naturel n vérifiant $2A^3 + 2 \geq nA$, ainsi pour $n = 2A^2$, on obtient :

$$2A^3 + 2 - 2A^3 \in \mathbb{E} \dots \text{.} \text{.} \text{.}$$

Mais l'important, c'est de chercher !

PROLONGEMENTS

Plus loin (cf. 3), on va montrer que les seules parties qui vérifient les conditions du problème sont $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$.

Les conditions i) et ii) sont bien indépendantes. On peut en effet trouver une infinité d'ensembles $\mathbb{E}$ satisfaisant à l'une des conditions et non à la deuxième.

1) Ensembles vérifiant ii) et non i)

Soit a un entier supérieur ou égal à 3, posons $\mathbb{E} = a\mathbb{N}$ (ensemble des multiples de a). Il est clair que la condition ii) est vérifiée.

Soit $x \in \mathbb{E}$, x est de la forme $x = ak$ ($k \in \mathbb{N}$), on a $2x^2 + 21 = a(2a^2k^3) + 2$, ce qui n'appartient pas à $a\mathbb{N}$, donc la condition i) n'est pas vérifiée.

2) Ensembles vérifiant i) et non ii)

Soit a un entier naturel. Définissons par récurrence la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $x_0 = a$,

et pour tout entier naturel n : $x_{n+1} = 2x_n^3 + 2$

Posons $\mathbb{E}_a = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (ensemble des valeurs de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

• $\mathbb{E}_a$ vérifie i). En effet :

Soit $y \in \mathbb{E}_a$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $y = x_p$, donc $2y^3 + 2 = 2x_p^3 + 2 = x_{p+1} \in \mathbb{E}_a$

• $\mathbb{E}_a$ ne vérifie pas ii), en effet :

soit k un entier naturel non nul fixé, on a $x_{k+1} = 2x_k^3 + 2 > 2x_k^3 \geq 2x_k$, comme $x_k > 0$ alors $x_k < x_{k+1} - x_k < x_{k+1}$, et par suite l'entier $x_{k+1} - x_k$ ne peut pas appartenir à $\mathbb{E}_u$.

3) Une caractérisation de l'ensemble $\mathbb{E}$

Définissons par récurrence la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $p_0 = 0$ et,

pour tout entier naturel n : $p_{n+1} = 2p_n^3 + 2$.

Remarquons que l'ensemble $\mathbb{E}$ contient tous les termes de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On va envisager deux cas :

- Premier cas : $1 \in \mathbb{E}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $p_n \geq n$ ($(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite strictement croissante d'entiers naturels), alors par la condition ii), $p_n - 1 \in \mathbb{E}$ et après $p_n - n$ étapes (à chaque fois on retranche 1), on aboutit à $n \in \mathbb{E}$. Donc $\mathbb{E} = \mathbb{N}$.

- Deuxième cas : $1 \notin \mathbb{E}$.

Montrons l'inclusion $\mathbb{E} \subset 2\mathbb{N}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un entier naturel impair $2k + 1 \in \mathbb{E}$; comme $2 \in \mathbb{E}$, alors par la condition ii), $2k + 1 - 2 = 2k - 1 \in \mathbb{E}$ et par récursivité (au bout de k étapes), on arrive à $1 \in \mathbb{E}$, ce qui contredit notre hypothèse de départ. Donc $\mathbb{E} \subset 2\mathbb{N}$.

Pour finir, il reste à montrer l'inclusion $2\mathbb{N} \subset \mathbb{E}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier n tel que $p_n \geq 2k$ (puisque $p_n \geq n$, il suffit de prendre n supérieur ou égal à $2k$). D'après la condition ii), on a $p_n - 2 \in \mathbb{E}$ et après, $\frac{p_n - 2k}{2}$

étapes (à chaque fois on retranche 2), on aboutit à $2k \in \mathbb{E}$. Donc $\mathbb{E} = 2\mathbb{N}$.