

Une solution « évidente » est la configuration hexagone régulier dans laquelle un point est au centre du disque et les six autres répartis comme les sommets d'un hexagone régulier sur la circonférence du disque. Cette solution définit six régions dans le disque, une des régions devra contenir au moins deux points. A l'intérieur de chaque région si on veut placer ailleurs qu'au centre du disque deux points à une distance supérieure ou égale à 1 ; il faut les placer confondus avec les sommets de l'hexagone à la frontière avec les régions adjacentes. Nous ne pourrons placer de cette façon là que 6 points, ces six points étant sur la circonférence la seule façon de placer le septième est de le mettre au centre du disque.

Variante de présentation, par Pierre ANDRIEU :

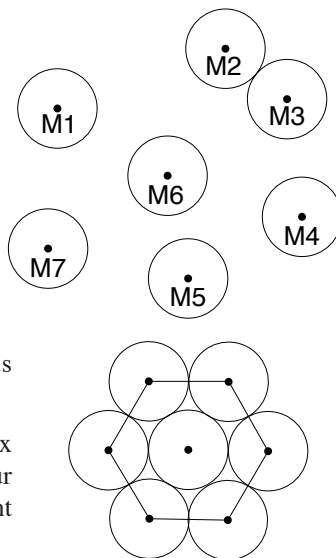
Soient donc 7 points du plan $M_1, \dots, M_7$.

J'en fais les centres de 7 disques de rayon $\frac{1}{2}$.

La conclusion « distances mutuelles supérieures ou égales à 1 » se traduit par une configuration où les disques sont, soit extérieurs, soit tangents extérieurement. Par exemple :

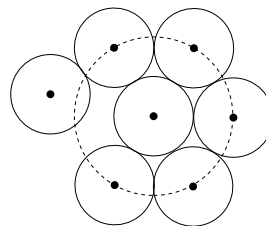
Il est clair que, dans le cas de la première figure, les centres $M_1, \dots, M_7$ ne peuvent être enfermés dans un disque de rayon 1. Il faudrait que la configuration soit plus condensée. Or, la forme la plus condensée est la suivante :

Les 7 disques sont tangents. Dans ce cas, six centres sont les sommets d'un hexagone régulier, sur la frontière d'un disque de rayon 1, le septième point est le centre de ce disque.



Il n'y a que cette solution. En effet, si on détache l'un des disques de façon à ce qu'il devienne extérieur à ses proches voisins, par exemple : il est clair que son centre sort du disque de rayon 1 sur la frontière du disque où se trouvent les cinq autres.

La seule solution est celle où six points sont les sommets d'un hexagone régulier, le septième étant le centre du disque.



Remarque (de P. Andrieu) :

« Avez-vous été convaincus ?

Des collègues cherchant ce problème, partaient tous de la façon suivante : on choisit un point à l'intérieur (strictement) d'un disque de rayon 1 et on essaie de démontrer qu'on ne peut pas disposer 6 autres points dans le disque. Mais ce n'est pas facile car cette démarche achoppe sur le fait qu'elle dépend du choix du premier point, et des suivants.

Sur un tel problème il n'est pas facile de produire une démonstration convaincante. En tout cas, c'est l'impression que j'ai. Mais peut-être les élèves peuvent-ils avoir des idées originales sur la question et je crois que cet exercice est bien adapté à des Olympiades de mathématiques de première ».

Autre variante, par François Lo Jacomo

Soit O le centre du disque et A, B, C, D, E, F les sommets d'un hexagone régulier de côté 1 inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1. Le disque fermé est la réunion de sept domaines disjoints :

- le centre O ,
- six secteurs angulaires semi-ouverts : AOB privé du segment $[OA]$ mais incluant $]OB]$, BOC privé de $[OB]$, mais incluant $]OC]$, ... FOA privé de $[OF]$, ... , mais incluant $]OA]$.

Soient M et N deux points d'un même secteur angulaire, par exemple AOB . M et N sont distincts de O , et l'angle MON est strictement inférieur à $\widehat{AOB}$, soit $\frac{\pi}{3}$. On en

déduit que $MN < 1$: plusieurs démonstrations sont possibles, par exemple :

- calculatoire, en utilisant la relation d'Al Kashi :

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM.ON.\cos \widehat{MON} < OM^2 + ON^2 - OM.ON$$

or, si $ON \leq OM$, $ON^2 \leq OM.ON$, donc $MN^2 < OM^2$. D'où $MN^2 < 1$.

- de manière plus naturelle, mais en faisant appel à un théorème tombé aux oubliettes (bien que très utile) : dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle. Comme $\widehat{MON} < \frac{\pi}{3}$ et que la somme des trois angles vaut π ,

MN n'est pas le plus grand côté du triangle MON , or, $OM \leq 1$ et $ON \leq 1$.

Il en résulte que chacun des six secteurs semi-ouverts ne peut contenir qu'un seul

des sept points dont les distances mutuelles sont toutes supérieures ou égales à 1 : le septième point est donc obligatoirement O .

Réciproquement, les sept points O, A, B, C, D, E, F vérifient bien la condition de l'énoncé, ce qui prouve qu'une telle configuration est possible.

Autre variante (de la cellule académique) :

Supposons que les sept points soient distincts du centre O du disque. L'un au moins des angles géométriques $\widehat{MON}$ sera strictement inférieur à 60 degrés. Dans le triangle MON on peut supposer $1 \geq OM \geq ON$ et on a

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM.ON \cos \widehat{O}.$$

Or $\cos \widehat{O}$ est supérieur strictement à $\frac{1}{2}$. Donc $MN^2 < OM^2 + ON^2 - OM.ON$.

D'où $MN^2 < OM^2(1 + t^2 - t)$ en posant $t = \frac{ON}{OM}$, t est compris entre 0 et 1.

L'étude du trinôme montre que $1 + t^2 - t$ est inférieur ou égal à 1 sur cet intervalle ce qui, ajouté au fait que OM est inférieur ou égal à 1, est contradictoire avec $MN^2 \geq 1$.

COMMENTAIRE

- Les diverses variantes d'une même solution sont intéressantes à deux titres au moins :
 - Elles montrent que nous avons, nous enseignants, des conceptions largement ... subjectives de la « rigueur »,
 - corrélativement, elles laissent le champ libre aux élèves pour hasarder une rédaction ... Et, si les grandes lignes sont correctes, celle-ci ne sera pas méprisée ...
- Cela étant, comme le souligne Pierre Andrieu, l'exercice est un bon sujet d'une épreuve telle que nos Olympiades...

PALMARÈS

1^{er} Prix :	<i>Joël CLÉMENT</i>	lycée Joffre, Montpellier
2^{ème} Prix :	<i>Raphaël DAUZEL-PONTET</i>	lycée Jean Monnet, Montpellier
3^{ème} Prix :	<i>Jean FIGUEROLA</i>	lycée Arago, Perpignan

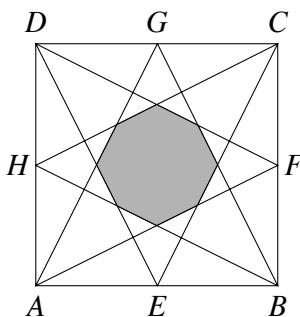
ACADÉMIE de NANCY-METZ

ÉNONCÉ

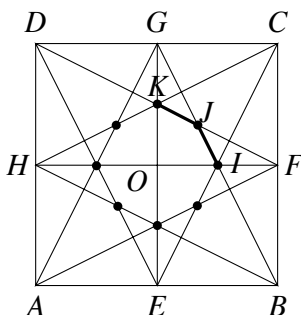
$ABCD$ est un carré de côté 1. E, F, G et H sont les milieux des côtés du carré.

1) Montrer que l'octogone grisé a 8 côté égaux. Est-il régulier ?

2) Calculer l'aire de cet octogone.



SOLUTION



1) Pour des raisons de symétrie évidentes, il suffit de prouver que $IJ = JK$ pour établir le fait que les côtés de l'octogone sont égaux. J est le centre de gravité du triangle OFG , de plus, $GI = FK$, on a donc :

$$IJ = \frac{1}{3} GI = \frac{1}{3} FK = JK$$

L'octogone a donc 8 côtés de même longueur. De plus :

$$OJ = \frac{2}{3} \times \frac{OC}{2} = \frac{OC}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6} \quad ; \quad OI = OK = \frac{1}{4} .$$

Comme $\frac{\sqrt{2}}{6} \neq \frac{1}{4}$, l'octogone n'est pas inscriptible, il n'est donc pas régulier.

2) Comme J est le centre de gravité du triangle OGF , on a :

$$\text{Aire}(OGJ) = \frac{1}{3} \text{Aire}(OGF)$$

et

$$\text{Aire}(OKJ) = \frac{1}{2} \text{Aire}(OGJ) = \frac{1}{6} \text{Aire}(OGF) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \text{Aire}(ABCD).$$

L'aire de l'octogone est donc égale à $\frac{1}{6}$.

N.D.L.R. (et de François LO JACOMO)

Au 1°), l'intervention du centre de gravité de OFG permettra de calculer OJ , mais elle ne s'impose pas d'emblée pour établir l'égalité des côtés de l'octogone.

Les quatre axes de symétrie du carré le sont aussi pour toute la figure et l'octogone coloré a donc 8 côtés égaux.

COMMENTAIRES

a) La définition d'un polygone « régulier » gagne à être bien assimilée dès les débuts du collège (voire avant !) : pourquoi un rectangle et un losange non carré ne sont-ils pas « réguliers » ?

Cela étant, l'épreuve de Nancy-Metz est un exercice de géométrie agréable.

Mais la cellule académique a fait part de sa déception : « la notion de polygone régulier ne semble pas bien assimilée ». Par ailleurs, « beaucoup de candidats ont tenté une résolution analytique et ont abandonné face à des expressions inextricables ».

De quoi inciter à revaloriser ... diverses définitions de figures-clés susceptibles de valeur générale : ainsi un carré, un triangle équilatéral sont des polygones invariants dans des rotations respectives de $k.90^\circ$ ou de $k.120^\circ$. Cela induit aussitôt de multiples propriétés et se généralise... Est-il indispensable pour faire intervenir ces rotations d'une étude « théorique » de la rotation ?... certes pas... Donnons-nous un peu d'air...

b) Il s'est trouvé des solutions par l'analytique, avec recherche des équations des côtés, des coordonnées des sommets (d'où l'égalité des côtés de l'octogone), puis pour le 2°, d'une recherche d'existence d'un cercle circonscrit (les médiatrices des côtés sont-elles concourantes ?). Mais cela est très long ...