

Question 1

Commençons par étudier le cas où $C' = C$.

Dans ce cas les deux tétraèdres ont la même hauteur issue de C , donc leurs volumes sont proportionnels aux aires de leurs bases respectives SAB et $SA'B'$, donc à $\frac{1}{2} SA \times SB \sin \widehat{ABC}$ et, $\frac{1}{2} SA' \times SB' \sin \widehat{ABC}$ donc à $SA \times SB$ et $SA' \times SB'$, donc à $SA \times SB \times SC$ et $SA' \times SB' \times SC'$ puisque $SC' = SC$.

Lorsque $C' \neq C$, menons par C' le plan r' parallèle à (ABC) . r' coupe les arêtes du tétraèdre $SABC$ en A'' , B'' et C'' .

Les volumes v'' de $SA''B''C''$ et v' de $SA'B'C'$ sont tels que

$$\frac{v'}{v''} = \frac{SA' \times SB' \times SC'}{SA'' \times SB'' \times SC''} \text{ d'après le premier cas.}$$

Les volumes v de $SABC$ et v'' de $SA''B''C''$ sont tels que

$$\frac{v''}{v} = \frac{SA'' \times SB'' \times SC''}{SA \times SB \times SC} \text{ (homothétie de centre } S\text{)}.$$

Il en résulte que $\frac{v'}{v} = \frac{SA' \times SB' \times SC'}{SA \times SB \times SC}$.

Question 2

a) On a alors $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SQ}{SC} = \frac{1}{2}$ et, $I = Q = P$, d'où $v' = \frac{1}{8} v$.

b) Posons $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $SM = x$, $SN = y$ et $SP = z$.

Alors $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{c-z}{c}$ et $xyz = \frac{1}{8} abc$.

On obtient $y = \frac{b}{a} x$, $z = \frac{c(a-x)}{a}$.

En remplaçant dans $xyz = \frac{1}{8} abc$, on obtient $x^2(a-x) = \frac{1}{8} a^3$ et par conséquent $8x^3 - 8ax + a^3 = 0$.

D'après a) $x = \frac{a}{2}$ est racine. Ce que l'on vérifie. On obtient alors l'équation suivante :

$$8\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x^2 - \frac{a}{2}x - \frac{1}{4}a^2\right) = 0,$$

dont les racines sont $\frac{a}{4}(1 - \sqrt{5})$, $\frac{a}{4}(1 + \sqrt{5})$ et $\frac{a}{2}$.

Seules les deux dernières racines conviennent.

Ainsi deux points M de $[SA]$ donnent un volume de $SMNP$ égal à $\frac{1}{8} abc$.