

SOLUTION 1

$$(AC) \perp (CB)$$

$$AC = CB = a$$

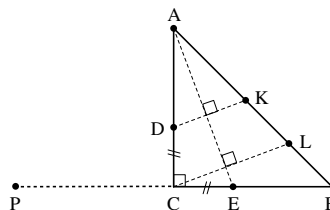
$$CD = CE = b$$

$$D \in [AC]$$

$$E \in [CB]$$

soit P tel que C milieu de $[PB]$.

Montrons que $(PD) \perp (AE)$.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AE} &= (\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}) \\ &= \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{CE} \\ &= 0 + PE \times CE \cos 0 + (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{CE} \\ &= (a + b)b + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{CE}, \text{ (car } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \text{ et } \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0) \\ &= ab + b^2 + (-1)ba + (-1)bb \\ \text{car } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} &= CD \cdot AC \cos \pi = b \cdot a (-1) \text{ et } \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{CE} = EC \cdot CE \cos \pi = b \cdot b (-1) \\ \text{donc } \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AE} &= ab + b^2 - ba - b^2 = 0. \end{aligned}$$

Donc $(PD) \perp (AE)$ et P, D, K alignés.

Conséquence : $(PK) \parallel (CL)$.

Théorème des milieux : L milieu de $[BK]$.

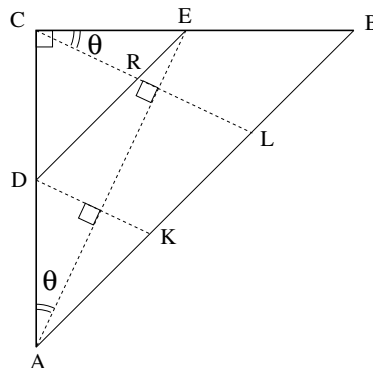
SOLUTION 2

Soit R l'intersection de (DE) et (CL) .

Posons $\theta = \widehat{BCL} = \widehat{CAE}$ (angles à côtés perpendiculaires).

Posons $a = CA$

$$\alpha = CD = CE.$$



Dans le triangle BCL , la loi des sinus s'écrit :

$$\frac{BL}{\sin \theta} = \frac{BC}{\sin \widehat{BLC}}$$

$$\begin{aligned} \text{comme } \widehat{BLC} &= \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \\ &= \frac{3\pi}{4} - \theta \end{aligned}$$

$$\text{et que } \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$BL = \frac{a \sin \theta}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$KDRL$ étant un parallélogramme, il suffit de montrer que $DR = BL$.

Dans le triangle CDR , la loi des sinus s'écrit :

$$\frac{DR}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{CD}{\sin \widehat{CRD}} \quad \text{d'où } DR = \frac{\alpha \cos \theta}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\text{Le rapport } \frac{BL}{DR} \text{ vaut } \frac{a \sin \theta}{\alpha \cos \theta} = \frac{a}{\alpha} \tan \theta$$

Or, dans le triangle rectangle CAE , on a :

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{a} \quad \text{donc } \frac{BL}{DR} = 1,$$

ceci achève la preuve.

N.B. J'utilise, entre autres :

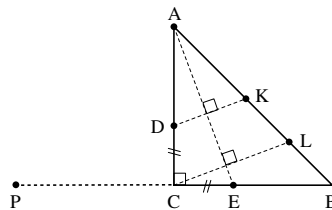
- la somme des angles d'un triangle qui vaut π et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$
- les droites (AB) et (DE) parallèles et des angles égaux à $\frac{\pi}{4}$: $\widehat{CBL}$ et $\widehat{CDR}$.

SOLUTION 3

- $(AC) \perp (CB)$
- $CA = CB$
- $D \in [AC]$
- $E \in [CB]$

Dans la rotation directe de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$

- E a pour image D
- A a pour image le point P symétrique de B par rapport à C
- La droite (AE) a pour image la droite (PD) .
- Les droites (AE) et (PD) sont des perpendiculaires.
- Les droites (PD) et (DK) sont confondues (elles ont (D) en commun et elles sont



toutes deux perpendiculaires à (AE)).

Dans le triangle BPK :

- $(CL) \parallel (PK)$ car $(CL) \perp (AE)$ et $(PK) \perp (AE)$

- C milieu de $[PB]$,

Alors L est le milieu de $[KB]$ (Théorème des milieux).

SOLUTION 4

On a les égalités d'angles :

$\widehat{CBD} = \widehat{CAE}$, angles symétriques par rapport à la médiatrice de $[AB]$.

$\widehat{CAE} = \widehat{LCB}$, angles à côtés perpendiculaires
 $((LC) \perp (AE)$ et $(CB) \perp (AC)$).

Il vient : $\widehat{CBD} = \widehat{LCB}$.

Soit I le point d'intersection des droites (LC) et (BD) .

De l'égalité d'angles précédente, on déduit que le triangle CBI est isocèle en I .

Dans le triangle rectangle DCB :

$\widehat{CDB}$ est le complémentaire de $\widehat{CBD}$

$\widehat{DCI}$ est le complémentaire de $\widehat{ICB}$

on en déduit que les angles $\widehat{CDB}$ et $\widehat{DCI}$ sont égaux et donc que le triangle DCI est isocèle en I (deux angles égaux).

On obtient alors : $ID = IC = IB$ et I est le milieu de $[BD]$ (1).

Or, en notant J le point d'intersection des droites (DE) et (CL) , les triangles DJI et ILB sont semblables (égalité d'angles alternes-internes d'une part et d'angles opposés par le sommet d'autre part).

De ce qui précède on déduit que, de plus, les triangles sont isométriques et alors I est le milieu de $[DB]$ et $[JL]$.

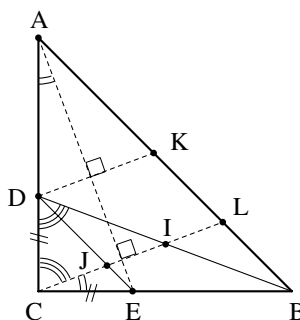
D'où : $DLJB$ est un parallélogramme.

Par ailleurs, le quadrilatère $DKIJ$ est aussi un parallélogramme car $(DE) \parallel (KL)$ et $(DK) \parallel (LC)$.

L'égalité en longueur des côtés opposés d'un parallélogramme permet de conclure que $KL = DJ = LB$.

Variante, par H.B.

Dès que l'on a la propriété (1) - I milieu de $[BD]$ -, il suffit d'appliquer le « théorème des milieux » au triangle BDK , puisque $(CL) \parallel (DK)$.



SOLUTION 5

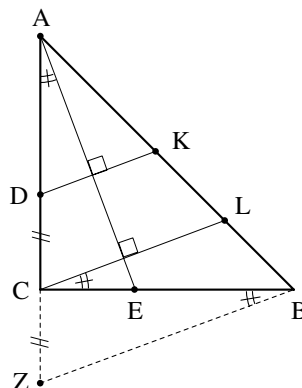
J'appelle Z le symétrique de D par rapport à la droite (CB).

$$\widehat{CAE} = \widehat{LCB} \text{ (angles aigus à côtés perpendiculaires)}$$

$$\widehat{CBZ} = \widehat{CAE} \text{ (isométrie des triangles CBZ et ACE)}$$

donc $\widehat{LCB} = \widehat{CBZ}$. Or, ils sont alternes-internes, donc $(ZB) \parallel (LC)$. (CL) est donc l'axe médian. cqfd.

Ou encore, les trois parallèles déterminant sur une sécante des segments égaux, elles déterminent sur toute autre sécante des segments égaux.



N.D.L.R. Précision pour la ligne 2

On peut aussi déduire l'égalité $\widehat{CBZ} = \widehat{CAE}$ de la considération des tangentes de ces angles.

SOLUTION 6

Dans le repère $(C; \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, A (1 ; 0), B (0 ; 1) et D (m ; 0)

Comme $CD = CE$, E (0 ; m)

$\overrightarrow{EA}$ (1 ; -m), donc un vecteur normal à (EA) est $\vec{u}$ (m ; 1)

(CL) est la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$ donc de coefficient directeur $\frac{1}{m}$. Par consé-

quent, (CL) : $y = \frac{1}{m} x$.

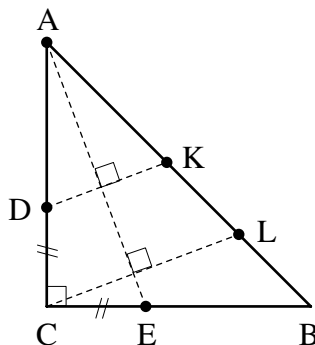
(DK) est la parallèle à (CL) passant par D, donc (DK) : $y = \frac{1}{m} x - 1$.

L est le point d'intersection de (CL) et (AB)

Or (AB) a pour équation : $y = -x + 1$

Donc les coordonnées de L sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = \frac{1}{m} x \end{cases}$$



Après calculs :

$$L\left(\frac{m}{1+m} ; \frac{1}{1+m}\right)$$

K est le point d'intersection de (DK) et (AB)

Donc les coordonnées de K sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = \frac{1}{m}x - 1 \end{cases}$$

Après calculs :

$$K\left(\frac{2m}{1+m} ; \frac{1-m}{1+m}\right)$$

$$BL^2 = (x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2 = \frac{2m^2}{(1+m)^2}$$

$$KL^2 = (x_L - x_K)^2 + (y_L - y_K)^2 = \frac{2m^2}{(1+m)^2}$$

d'où $BL = LK$.

SOLUTION 7

Traçons le cercle de centre C et de rayon CD .
Ce cercle recoupe (AC) en D' .

ANALYSE : si on parvient à démontrer que les droites $(D'B)$, (CL) et (DK) sont parallèles, alors C qui est le milieu de $[DD']$ a son image L , par la projection de direction (DK) sur (AB) , qui est le milieu de $[KB]$ image de $[DD']$.

1°) $(D'E)$ est perpendiculaire à (DE) .

En effet, le triangle $(CD'E)$ est inscrit dans le cercle de diamètre $[DD']$ donc il est rectangle en E .

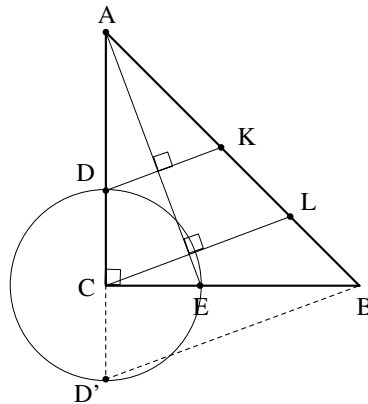
2°) $(D'E)$ est perpendiculaire à (AB) .

En effet, par la réciproque de Thalès appliquée aux triangles (CDE) et (CAB) , on montre que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.

Comme $(D'E)$ est perpendiculaire à (DE) , alors $(D'E)$ est perpendiculaire à (AB) .

3°) Le point E est l'orthocentre du triangle $(D'AB)$.

On vient de prouver que $(D'E)$ est perpendiculaire à (AB) . De plus, (BC) est perpendiculaire à $(D'A)$.



Donc $(D'E)$ et (BC) sont des hauteurs du triangle $(D'AB)$. Elles se coupent en E .
Donc E est l'orthocentre du triangle $(D'AB)$.

4°) $(D'B)$, (CL) et (DK) sont parallèles.

Puisque E est l'orthocentre du triangle $(D'AB)$ alors (AE) est la troisième hauteur donc $(D'B)$ et (AE) sont perpendiculaires.

Les droites $(D'B)$, (CL) et (DK) sont toutes perpendiculaires à (AE) . Elles sont donc parallèles.

Variante, par François LO JACOMO

La méthode est la même, mais, au départ, au lieu du cercle, F.L.J. parle de symétrie, par rapport à (CB) , de D , puis du triangle isocèle CDE .

D'où $\widehat{DED'}$ droit.

Au 2^o), au lieu de Thalès, F.L.J. parle d'homothétie des triangles CDE et CAB . D'où $(DE)/(AB)$.

La suite est sans changement.

SOLUTION 8

Segments égaux ? Je pense à Thalès.

De B traçons la droite perpendiculaire à (AE) . Elle coupe (AE) en H , donc sur le cercle circonscrit au triangle ABC , et elle coupe la droite (AC) en G .

Démontrons que C est le milieu de $[DG]$:

$\widehat{HBE} = \widehat{EAC} = \alpha$ comme angles interceptant le même arc CH .

Dans le triangle BCG ,
 $\tan \alpha = CG/CB$.

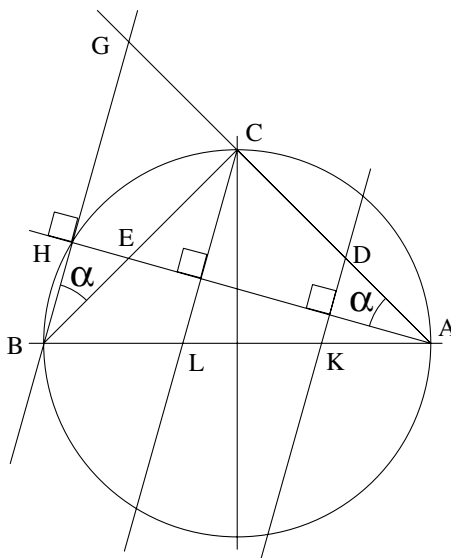
Or, dans le triangle EAC ,
 $\tan \alpha = EC/AC$

Or, $AC = BC$ donc $CG = EC$.

Comme $EC = CD$ par hypothèse, il vient : $CD = CG$ et C est le milieu de $[GD]$.

Les points D , C et G se projettent en K , L et B suivant une direction perpendiculaire à (AE) .

Donc $KL = LB$ (théorème des milieux).

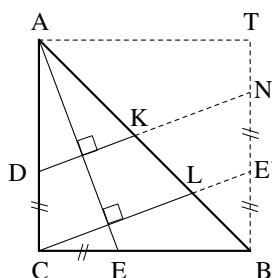


Variante (par H.B.), pour un passage :

Le début est le même jusqu'à l'introduction de $\tan \alpha$. En lieu et place de cette introduction, comparons les triangles AEC et CBG . Ils ont « un côté égal » ($AE = BC$) « compris entre deux angles respectivement égaux ». Ils sont donc « égaux ». D'où $CG = EC$.

Même suite que ci-dessus.

SOLUTION 9 (par H. B.)



- Les solutions 1 et 3 utilisent implicitement le transfert d'une figure sur une figure « double » : le triangle rectangle CAB est une « moitié » du triangle isocèle ABP .
- Les solutions 5 et 7, bien que ce soit moins apparent, sont liées au « doublement » de CAB par symétrie par rapport à (CB) .
- Mais il y a une autre façon de « doubler » CAB :

Faisons-le selon le carré $ACBT$ de centre O (cf. figure ci-dessus) et envisageons la rotation $(O, \frac{\pi}{2})$ qui envoie C sur B . Alors :

$$E \rightarrow E', \text{ sur } [BT], \text{ tel que } BE' = CE$$

et $(AE) \rightarrow (CE')$ cependant que, d'autre part, $(AE) \perp (CL)$.

D'où C, L, E' alignés.

Le parallélogramme $DCE'N$ implique $NE' = CD$.

Voilà donc E' milieu de $[BN]$.

Le théorème des milieux, appliqué au triangle BKN , implique que L est le milieu de $[BK]$.

COMMENTAIRES

- Le grand nombre de solutions accessibles fait de cet exercice un bon « problème ouvert » permettant de dégager des méthodes de résolution généralisables.
- A la lecture des solutions, on aura observé combien ce problème est aussi de mise au collège ! ... et en seconde.

NOMBRE D'INSCRITS ET PRIX

Sur 139 inscrits, seuls 44 (28 filles et 16 garçons) ont composé (ces candidats provenaient de 9 lycées sur 10).

L'épreuve se déroulait pendant les vacances de Pâques : cela a freiné la participation des élèves !

8 élèves ont été primés (2 garçons et 6 filles).