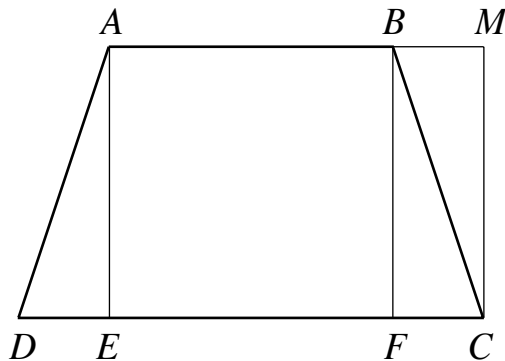


SOLUTION 1



L'aire du trapèze $ABCD$ est égale à l'aire du rectangle $AECM$ où M désigne la projection orthogonale de C sur la droite (AB) et E le projeté orthogonal de A sur (CD) . Or $BC = 5$, donc le point C est situé sur un quart de cercle de centre B et de rayon 5. Le problème revient donc à déterminer pour quelle position de C l'aire du rectangle $AECM$ est maximale.

En posant $\alpha = \widehat{FBC}$, avec $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, l'aire $S(\alpha)$ du rectangle $AECM$ est donnée

(F désignant le projeté orthogonal de B sur (CD)) par :

$$S(\alpha) = EC \times CM = EC \times BF \text{ avec : } EC = EF + FC$$

Or dans le triangle rectangle FBC , on a :

$$FC = BC \sin \alpha = 5 \sin \alpha$$

$$BF = BC \cos \alpha = 5 \cos \alpha$$

D'où $S(\alpha) = (5 + 5 \sin \alpha) \times 5 \cos \alpha$, qui s'écrit :

$$S(\alpha) = 25(1 + \sin \alpha) \cos \alpha$$

L'aire du rectangle sera maximale pour le maximum de la fonction S sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction S est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$S'(\alpha) = 25[\cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 + \sin \alpha)(-\sin \alpha)]$$

$$S'(\alpha) = 25[\cos^2 \alpha - \sin \alpha - \sin^2 \alpha]$$

$$S'(\alpha) = 25[(1 - \sin^2 \alpha) - \sin \alpha - \sin^2 \alpha]$$

$$S'(\alpha) = 25[-2\sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1]$$

L'équation $-2x^2 - x + 1 = 0$ a pour racines -1 et $\frac{1}{2}$, donc $S'(\alpha)$ s'écrit :

$$S'(\alpha) = 25\left[-2(\sin \alpha + 1)\left(\sin \alpha - \frac{1}{2}\right)\right] = -50(\sin \alpha + 1)\left(\sin \alpha - \frac{1}{2}\right)$$

Etude du signe de $S'(\alpha)$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$\sin \alpha + 1$ est positif sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\sin \alpha - \frac{1}{2}$ est négatif sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ et est positif sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$

Le signe de $S'(\alpha)$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est donné par :

α	0	$\pi/6$	$\pi/2$
$\sin \alpha + 1$	+		+
$\sin \alpha - 1/2$	-	0	+
$S'(\alpha)$	+	0	-

La fonction S est donc croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, elle admet donc un maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$, la longueur DC est $EF + 2FC = 5 + 2 \times 5 \sin \frac{\pi}{6} = 10$.

L'aire du trapèze isocèle $ABCD$ sera maximale lorsque la longueur CD sera égale à 10 cm.

SOLUTION 2

L'aire du trapèze isocèle $ABCD$ est donnée par :

$$\frac{(AB + DC) \times AE}{2}$$

Or $DC = EF + 2DE$, d'où l'aire du trapèze est donnée par :

$$\frac{(2AB + 2DE) \times AE}{2} = (AB + DE) \times AE.$$

En posant $DE = x$, $0 < x < 5$, nous avons dans le triangle rectangle ADE :

$$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{25 - x^2}$$

L'aire $S(x)$ du trapèze $ABCD$ est donnée par :

$$S(x) = (5 + x) \times \sqrt{25 - x^2}.$$

L'aire du trapèze sera maximale pour le maximum de la fonction S .

* Si le candidat connaît la formule « $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ », (pas au programme de première), il peut continuer :

La fonction S est dérivable sur $]0 ; 5[$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$S'(x) = \sqrt{25 - x^2} + (5 + x) \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}$$

$$S'(x) = \frac{25 - x^2 - 5x - x^2}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$S'(x) = \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$S'(x)$ est du signe de $-2x^2 - 5x + 25$ qui s'annule pour -5 et $\frac{5}{2}$.

$S'(x)$ est positif sur $]0 ; \frac{5}{2}]$ et est négatif sur $[\frac{5}{2} ; 5[$. La fonction S est croissante sur l'intervalle $]0 ; \frac{5}{2}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\frac{5}{2} ; 5[$. Elle admet donc un maximum en $\frac{5}{2}$.

L'aire du trapèze sera maximale pour $x = \frac{5}{2}$, ce qui correspond à $CD = 10$ cm.

* Si le candidat ne connaît pas la formule « $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ », il se trouvera dans une impasse mais pourra quand même, en utilisant sa calculatrice, savoir pour quelle valeur x de la fonction S est maximale.

Remarque :

Le maximum de l'aire de $ABCD$ correspond à celui de l'hexagone $ABCDLKD$ obtenu en « doublant » $ABCD$ par une symétrie autour de (DC) .

On observera que cet hexagone ayant ses côtés de même longueur imposée, il est d'aire maximale quand il est régulier (et inscrit dans le cercle de diamètre $[CD]$).

COMMENTAIRES

120 candidats inscrits, la moitié de 2001 ; 65 effectifs (regroupés dans 6 établissements de l'Académie) ... De petits nombres ... « peut-être liés au choix des exercices proposés en 2001 ».

Et la cellule académique demande « de faire connaître le niveau raisonnable des exercices proposés en 2002 ».

PALMARÈS

Les membres du jury ont décidé des critères suivants :

- A : exercice résolu avec une argumentation complète et correcte ;
- B : exercice résolu, mais l'argumentation n'est pas complète ;
- C : de bonnes idées, mais exercice inachevé ;
- D : autres cas.

Il en est ressorti onze copies, que le jury a décidé de classer en trois groupes.
Le premier a traité les quatre exercices mais, dans les exercices 2 et 4, l'argumentation n'est pas parfaite.

Il s'agit de : *Francelin TOURTET* lycée Champollion, Grenoble

Les deux suivants ont traité complètement les deux premiers exercices et abordé avec un relatif succès les autres exercices.

Il s'agit de : *Nicolas HONORAT* lycée Berthollet, Annecy
Marie COUSSEDIÈRE lycée Champollion, Grenoble.

Huit candidats suivants ont été retenus parce qu'ils ont, pour sept d'entre eux, traité complètement un exercice et produit, dans au moins deux autres exercices, un travail qui ressort du lot grâce au sérieux ou à l'originalité des solutions mises en œuvre mais inachevées ; le dernier nommé l'a été pour sa régularité dans le travail produit, mais les argumentations ne sont malheureusement jamais complètes.

(N.B. : Le premier lauréat - inscrit en 1^{ère} L - suit par correspondance les enseignements de série S dans les disciplines scientifiques).