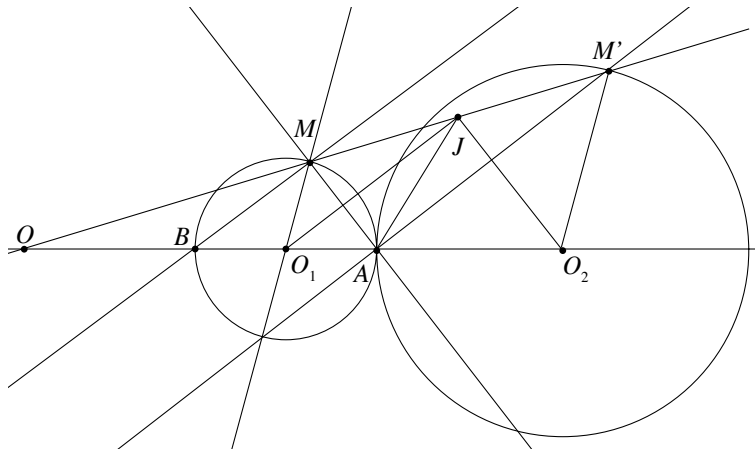


SOLUTION



1) $[BA]$ étant un diamètre de $\mathcal{C}_1$, le triangle BMA est rectangle en M . Les droites (BM) et (AM') sont donc parallèles. $\mathcal{C}_2$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par deux homothéties. L'une, de rapport négatif a pour centre A et l'autre, de rapport positif, envoie B sur A . Notons $\mathcal{H}$ cette seconde homothétie. $\mathcal{H}(M)$ est un point N de $\mathcal{C}_2$ tel que (BM) et (AN) soient parallèles. On a donc bien $N = M'$ puisque par hypothèse, les points A, M, M' sont distincts. (MM') passe donc par le centre O de l'homothétie $\mathcal{H}$; c'est un point fixe de la droite (O_1O_2) .

2) (O_1J) est la médiatrice de $[AM]$, (O_2J) est la médiatrice de $[AM']$. Le triangle O_1JO_2 est rectangle en J . J appartient donc au cercle de diamètre $[O_1O_2]$.

Réciproquement, soit J un point du cercle de diamètre $[O_1O_2]$. Lorsque J est distinct de O_1 et de O_2 , les perpendiculaires issues de A à (O_1J) et à (O_2J) recoupent $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en M et M' . Comme $O_1M = O_1A$ et que $O_2M' = O_2A$, (O_1J) et (O_2J) sont les médiatrices respectives des segments $[AM]$ et $[AM']$. Le triangle MAM' est bien rectangle en A . L'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[O_1O_2]$ privé des points O_1 et O_2 .

3) Posons $x = \widehat{AO_1M}$. $AM = 2R_1 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $AM' = 2R_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 2R_2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

L'aire du triangle MAM' est donc $\mathcal{A}(x) = 2R_1R_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = R_1R_2 \sin x$.

Cette expression est maximale lorsque $x = \frac{\pi}{2}$.

Remarques :

- La question 1) peut-être résolue par le théorème de Thalès mais il faut montrer au préalable que (MM') coupe la droite (O_1O_2) .
- La question 2) peut-être résolue en considérant l'homothétie qui transforme M en J . Il faut alors montrer qu'elle transforme B en O_1 .
- La question 3) peut-être résolue sans connaître la formule de duplication du sinus en étudiant la fonction A .

Mais on peut aussi déduire l'aire du triangle AMM' de celle du trapèze $O_1MM'O_2$

$\left(\frac{1}{2} (R_1 + R_2) (R_1 + R_2) \sin x \right)$ en ôtant les aires $\left(\frac{1}{2} R_1^2 \sin x \text{ et } \frac{1}{2} R_2^2 \sin x \right)$ des triangles O_1AM et O_2AM' . On obtient bien $R_1R_2 \sin x$.

- Surtout, voici une autre solution (par H.B.) :

2 Aire triangle $(AMM') = AM \times AM'$

Utilisons l'homothétie $\mathcal{H}$ (cf. 1°) : $AM' = BM \times \frac{R_2}{R_1}$. Donc

2aire(AMM') = $AM \times BM \times \frac{R_2}{R_1}$ et l'aire est maximale avec $AM \times BM$ maximal.

Or $AM \times BM$ est le double de l'aire du triangle ABM . Et celle-ci est maximale lorsque la hauteur MH relative à AB est maximale, c'est-à-dire $MH = R_1$, donc $(MO_1) \perp (O_1O_2)$.

COMMENTAIRES

a) Même remarque, à propos d'essais éventuels, que pour Créteil.

b) Ici aussi, le problème est assez aisé si et seulement si on songe à utiliser le point

B fourni par l'énoncé alors que cela ne s'imposait pas, donc en aide discrète ...

c) La figure est intéressante : la transformation proposée pour passer de *M* à *M'* est la composée, dans cet ordre, de la symétrie de centre O_1 suivie de l'homothétie de centre *A* qui transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ ou de cette homothétie suivie de la symétrie de centre O_2 . Et l'exercice établit que ces composées-là sont l'homothétie $\mathcal{H}$.

D'autre part, en associant à *A* le point *B'* diamétralement opposé sur $\mathcal{C}_2$, l'intersection *T* de (*BM*) et (*B'M'*) termine le rectangle *MAM'T*. Le lieu de *T* et celui de *J* sont associés dans une homothétie de centre *A* et de rapport $\frac{1}{2}$ ou 2 (selon l'ordre d'association choisi).

d) Le jury académique apporte les précisions suivantes :

« En 2002, dans l'Académie de Dijon, 279 élèves issus de 27 lycées publics et 5 lycées privés, se sont inscrits pour participer à ces secondes Olympiades. Ce nombre dépasse de très loin ce qui pouvait être espéré, compte tenu du « poids » de l'Académie, puisqu'environ 5000 candidats se sont inscrits en France. 203 élèves ont composé, les 203 copies ont été corrigées par les 10 professeurs et les deux inspecteurs pédagogiques régionaux, membres de la cellule académique..

L'année passée, les élèves étaient sortis de l'épreuve très déçus en raison du caractère inhabituel des exercices proposés et de leur trop grande difficulté liée, notamment, à des énoncés brefs et concis d'où ne sourdait aucune indication susceptible d'amorcer une solution. Il en a été tout autrement cette année. Tous les élèves ont pu aborder chacun des exercices avec parfois beaucoup de pertinence et d'imagination. Les copies ont été plus consistantes et les dix-huit élèves récompensés se détachent nettement de l'ensemble. Il est enfin essentiel de noter que le caractère plus accessible des exercices proposés aussi bien par la cellule nationale que par la cellule académique n'a pas altéré leur profond intérêt mathématique et donc la substance même du concours. »

Par ailleurs, Monsieur Daniel DETILLEUX, I.A - IPR, qui transmet cet avis, souligne que « les deux premiers objectifs de ces Olympiades sont en parfaite cohérence avec ceux des Travaux Personnels Encadrés :

1 - Développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche.

2 - Favoriser l'émergence d'une nouvelle culture visant à préparer les élèves à développer leur autonomie. »

PALMARÈS

Dix-huit lauréats. Voici les trois premiers :

1^{er} prix :	<i>Elsa JOUSSEAU</i>	lycée Lamartine, Mâcon
2^{ème} prix (ex æquo) :	<i>Xavier DELAMOTTE</i>	lycée Louis Davier, Joigny
	<i>Cyril MORY</i>	lycée Louis Davier, Joigny

(P.S. *Elsa JOUSSEAU* figure au palmarès national - 4^{ème} accessit-).