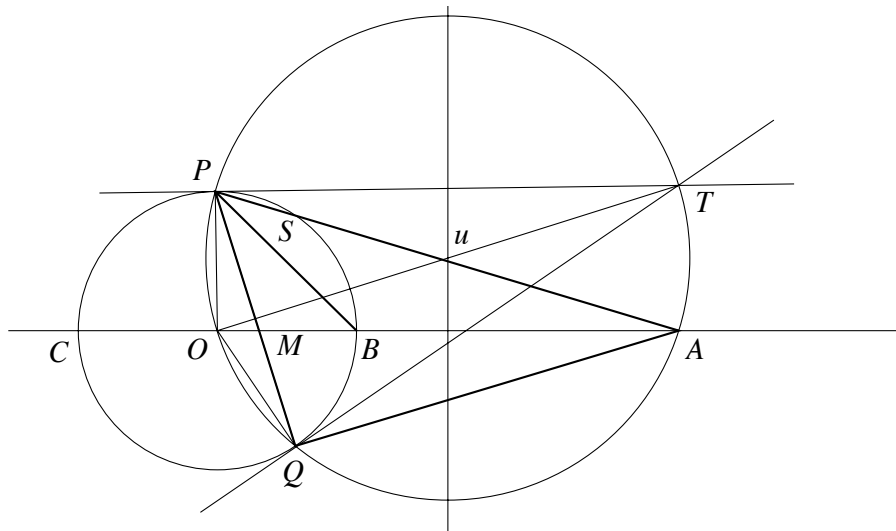




1 - • Les tangentes en P et Q sont perpendiculaires aux rayons $[OP]$ et $[OQ]$. Les triangles OPT et OQT sont rectangles. Donc $[OT]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ces triangles, qui n'est autre que le cercle (Γ) .

Le triangle OAT est donc lui aussi rectangle. Donc la droite (AT) est perpendiculaire à (D) .

T appartient à la perpendiculaire en A à (D) .

- Réciproquement, si T est un point de cette perpendiculaire, le cercle de diamètre $[OT]$ est un cercle (Γ) passant par O et A . Il coupe (C) en P et Q tels que OPT et OQT sont rectangles. Donc les droites (PT) et (QT) sont tangentes à (C) .
- Donc l'ensemble des points T est la droite perpendiculaire en A à (D) .

2 - Les arcs OP et OQ (sous-tendus par les rayons $[OP]$ et $[OQ]$) sont égaux. Donc, dans le cercle (Γ) , les angles inscrits $\widehat{OAP}$ et $\widehat{OAQ}$ sont égaux.

Donc (OA) est une bissectrice du triangle APQ . Elle est axe de symétrie de $\widehat{PAQ}$: les arcs $\widehat{BS}$ et $\widehat{BQ}$ sont égaux.

Donc, dans le cercle (C) , les angles inscrits $\widehat{BPQ}$ et $\widehat{BPS}$ sont égaux.

Donc (PB) est une bissectrice du triangle APQ .

Donc le centre du cercle inscrit dans le triangle APQ est l'intersection de (PB) et (OA) , c'est-à-dire B .

COMMENTAIRES

Deux jolis exercices de « lieux », le 1^{er} simple d'accès à partir de figures-clés élémentaires (tangente à un cercle, et triangles rectangles inscrits dans...).

La formulation du 2^{ème} n'est pas courante : elle est à encourager pour laisser le problème plus ouvert.

Les plus anciens d'entre nous, profs de maths, retrouveront là des éléments d'une partie jadis classique en géométrie du lycée : « *Division et faisceau harmoniques* ».

Ainsi, avec M intersection de (PQ) et (OA) ,
 H intersection de (PQ) et (OT) ,

on peut d'abord démontrer (niveau collège) que :

$$\overline{OM} \times \overline{OA} = \overline{OH} \times \overline{OT} \\ = OP^2$$

D'où, avec O milieu de $[BC]$, $OB^2 = \overline{OM} \times \overline{OA}$.

Cela caractérise la « division » C, B, M, A comme « harmonique ».

Le « faisceau » des droites $(PC), (PB), (PM), (PA)$ est donc « harmonique ».

Or, deux de ses « rayons conjugués », (PC) et (PB) sont perpendiculaires. Ils sont donc les bissectrices des angles formés par (PM) et (PA) ...

Cela ne va pas plus vite qu'avec la solution donnée, conforme aux programmes actuels, mais d'une part, cela met à nu la structure interne de la figure et en dévoile des ressorts, d'autre part une petite « balade chez les Dames du Temps jadis » garde quelque charme pour ceux qui les ont fréquentées...

Notons, en prime, que la division C, B, M, A étant harmonique avec trois points fixes, le quatrième, M , l'est aussi.

3) La recherche méthodique d'un lieu, à partir des hypothèses, des propriétés des figures-clés intervenantes, n'exclut pas, si l'on est bredouille, de procéder par essais. Avec papier-crayon, cela peut déjà aider et conduire à des conjectures,... ce qui met souvent sur la voie.

A plus forte raison avec un logiciel de géométrie... !

4) **La cellule académique signale que** « la sujet académique n'a été que très peu abordé, et fort peu réussi. » (et « qu'elle en tient compte pour élaborer le sujet 2003 »).

PALMARÈS

Parmi les 442 inscrits dans l'académie de Créteil, 292 candidats ont participé à la session 2002.

La correction des copies préalablement anonymées a permis de distinguer et de classer les 33 meilleures d'entre elles.

Les trois premiers prix attribués sont les suivants :

1^{er} prix :	<i>Arnaud LE GUILCHER</i>	lycée H. Moissan, Meaux
2^{ème} prix :	<i>Romain SCIARDIS</i>	lycée F. Mistral, Fresnes
3^{ème} prix :	<i>Kai CHU</i>	lycée A. de Mun, Nogent s/ Marne

Arnaud LEGUILCHER a obtenu un premier accessit au niveau national.