

SOLUTION

1) Compte tenu des hypothèses, les quadrilatères $OICJ$, $OIBK$, $IJAK$, ayant leurs quatre côtés de même longueur r sont des losanges.

On construit le parallélogramme $CIB\Omega$, qui est aussi un losange, donc $\Omega B = \Omega C = r$.

D'autre part, les droites (IB) et (JA) sont parallèles, car elles sont parallèles toutes les deux à la droite (OK) . Donc (ΩC) qui est parallèle à (IB) , est aussi parallèle à (JA) . Comme en outre $\Omega C = JA (= r)$, on en déduit que le quadrilatère convexe

$CJA\Omega$ est un parallélogramme, puis un losange car $JC = JA = r$.

En conséquence, $\Omega A = \Omega C$, d'où $\Omega B = \Omega C = \Omega A = r$.

Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , dont le rayon est r .

2) Les droites (IB) et (JA) sont parallèles et $IB = JA$ donc le quadrilatère convexe $IBAJ$ est un parallélogramme. Or la droite (IJ) est la médiatrice du segment $[CO]$, donc (CO) est perpendiculaire à (IJ) donc à (AB) qui est parallèle à (IJ) . (CO) est donc une hauteur du triangle ABC .

O est donc l'orthocentre du triangle ABC .

3) Soit α une mesure en radians de l'angle $\widehat{BOC}$ inscrit dans le cercle de centre I et rayon r . La mesure en radians de l'angle au centre correspondant est 2α , donc la longueur de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas le point O , est $2\alpha r$.

De même en appelant β et γ les mesures des angles $\widehat{COA}$ et $\widehat{AOB}$, on obtient la longueur L recherchée : $L = 2\pi(\alpha + \beta + \gamma)r$.

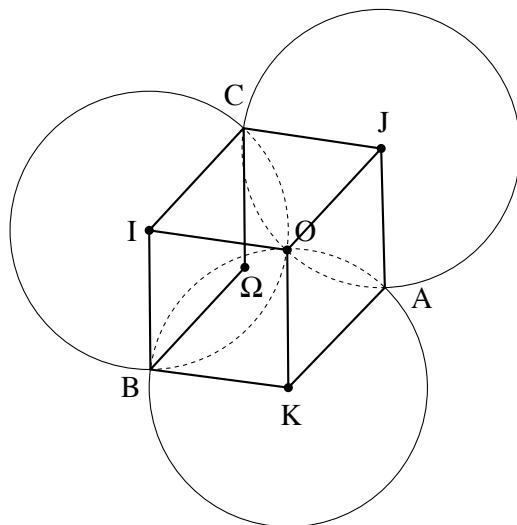
En remarquant que $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, on déduit que $L = 4\pi r$.

REMARQUES (N.D.L.R)

I - Le 1° conduit au « *théorème de Johnson* ».

Dans la brochure n° 503 (page 11 de la plaquette annuelle APMEP), co-éditée par ACL-Editions et l'A.P.M.E.P. : « *La Jubilation en mathématiques* », André DELEDICQ démontre la structure qui conduit à ce théorème et à la propriété du 2°.

« Un cube est caché là-dedans ! »



Caché ? Pas tant que cela ! Ses sommets sont C, I, O, J pour une face, Ω, B, K, A pour la face opposée.

II - François LO JACOMO intègre, lui, la figure du problème non pas dans une vision d'espace, mais dans une autre figure du plan :

Il construit un triangle $I'J'K'$ dont ABC est le triangle des milieux.

Pour cela, soit I', J', K' les symétriques de O par rapport à I, J, K respectivement.

$\widehat{OCI'}$ est droit et $(I'C) \parallel (IJ)$, avec $\overrightarrow{CI'} = \overrightarrow{JI}$.

De même $\overrightarrow{CJ'} = \overrightarrow{IJ}$.

C est donc le milieu de $[I'J']$. De même pour A et B vis-à-vis de $[J'K']$ et $[I'K']$.

Dès l'immersion de ABC dans $I'J'K'$ on retrouve des résultats classiques :

Le cercle ABC est le cercle d'Euler du triangle $I'J'K'$. Or O est le centre du cercle circonscrit à $I'J'K'$ ($OI' = OJ' = OK' = 2r$). Donc le cercle ABC a bien pour rayon r , et O est l'orthocentre de ABC .

III - Les deux immersions de la figure donnée proposées respectivement par André DELEDICQ et François LO JACOMO sont fort différentes !

Leur conjonction « inscrit le cube dans un nouveau solide... » dont l'étude se révélerait généreuse...

La pluralité des points de vue possibles est un bel attrait de la géométrie..., leur conjonction aussi !

COMMENTAIRES

1) Voilà donc un exercice en lui-même simple et « reposant » ce qui n'est pas péjoratif, mais qui relève de belles interprétations mettant en jeu des figures clés de l'espace ou du plan.

Merci à André DELEDICQ. et François LO JACOMO. de nous y avoir conduits !

2) Jacques Caron précise, pour le jury académique :

« Nous n'avons pas trouvé de copies susceptibles de mériter un prix, même académique (alors qu'en 2001 nous avions eu le 10^{ème} lauréat national).

Notre sujet avait été choisi en pensant qu'il pouvait être fait par certains candidats, mais ils se sont tous mis sur de fausses pistes en plaçant de façon intuitive, et erronée, le centre du cercle ».

Il y avait 8 présents pour 23 inscrits.