

SOLUTION

1) Montrons que l'on a bien :

Aire (GAB) = Aire (GBC) = Aire (GAC).

Soit I le milieu de $[BC]$. Dans le triangle ABC , appelons H le pied de la hauteur issue de A , et dans le triangle BGC , K le pied de la hauteur issue de G .

On sait que $GI = \frac{1}{3} IA$

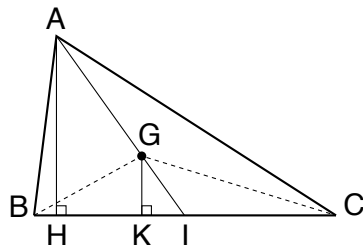


figure 1

Montrons que Aire (GBC) = $\frac{1}{3}$ aire(ABC).

Si ABC est isocèle en A , alors on a $H = K = I$ et, dans ce cas :

$$\text{Aire (BGC)} = \frac{1}{2} GI \cdot BC = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} IA \right) \cdot BC = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} IA \cdot BC \right) = \frac{1}{3} \text{ Aire (ABC)}.$$

Si ABC n'est pas isocèle, H est distinct de I , et dans le triangle AHI , en appliquant

Thalès, on a : $\frac{GK}{AH} = \frac{GI}{AI} = \frac{1}{3}$. D'où $GK = \frac{1}{3} AH$.

On a alors :

$$\text{Aire (BGC)} = \frac{1}{2} GK \cdot BC = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} AH \right) \cdot BC = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} AH \cdot BC \right) = \frac{1}{3} \text{ Aire (ABC)}.$$

De la même façon, on montrerait que Aire (BAG) = $\frac{1}{3}$ Aire (ABC)

et que Aire (GAC) = $\frac{1}{3}$ Aire (ABC).

(on pourrait aussi évoquer que l'on vient de montrer qu'un triangle ABC étant donné, G son centre de gravité, l'aire d'un triangle ayant comme sommets G et deux des sommets de ABC , vaut un tiers de l'aire de ABC)

Ainsi, on a bien le résultat annoncé.

2) Soit M intérieur au triangle et vérifiant $\text{Aire}(MAB) = \text{Aire}(MBC) = \text{Aire}(MAC)$.

On a $\text{Aire}(MAB) = \frac{1}{3} \text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(GAB)$

MAB et GAB ont même aire et une base commune, $[AB]$: M est donc sur la parallèle à (AB) passant par G (car les deux triangles ont même hauteur).

De même on montrerait que M est sur la parallèle à (BC) passant par G . On a donc $M = G$.

G est le seul point M intérieur au triangle ABC vérifiant la relation :

$$\text{Aire}(MAB) = \text{Aire}(MBC) = \text{Aire}(MAC).$$

3) Soit ABC acutangle et O le centre du cercle du cercle circonscrit.

Rappelons la formule, vue en classe de première comme « formule de l'aire » : étant donné un triangle ABC , son aire S , avec les notations habituelles ($a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$) est donné par :

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \hat{C}$$

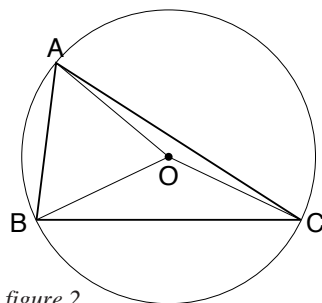


figure 2

On peut appliquer cette formule aux triangles AOB , AOC , BOC en remarquant que $OA = OB = OC = R$

(en notant R le rayon du cercle circonscrit) et, en utilisant le fait « que l'angle au centre est le double de l'angle inscrit », on obtient :

$$\text{Aire}(OAB) = \frac{1}{2} R^2 \sin(2\hat{C}) ; \text{Aire}(OBC) = \frac{1}{2} R^2 \sin(2\hat{A}) ;$$

$$\text{Aire}(OAC) = \frac{1}{2} R^2 \sin(2\hat{B}) .$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{\text{Aire}(OBC)}{\sin(2\hat{A})} = \frac{\text{Aire}(OAB)}{\sin(2\hat{C})} = \frac{\text{Aire}(OAC)}{\sin(2\hat{B})}$$

Montrons que le point O est le seul point M intérieur au triangle ABC vérifiant la relation :

$$\frac{\text{Aire}(MBC)}{\sin(2\hat{A})} = \frac{\text{Aire}(MAB)}{\sin(2\hat{C})} = \frac{\text{Aire}(MAC)}{\sin(2\hat{B})} \quad (1)$$

Soit M un point vérifiant (1). Posons $k = \frac{\text{Aire}(MBC)}{\sin(2\hat{A})}$

On a alors :

$$\text{Aire}(MAB) + \text{Aire}(MBC) + \text{Aire}(MAC) = \text{Aire}(ABC) \text{ d'une part,}$$

$$\text{Aire}(MAB) + \text{Aire}(MBC) + \text{Aire}(MAC) = k(\sin(2\hat{A}) + \sin(2\hat{B}) + \sin(2\hat{C}))$$

d'autre part.

$$\begin{aligned} \text{Or Aire}(OAB) + \text{Aire}(OBC) + \text{Aire}(OAC) &= \text{Aire}(ABC) \\ &= \frac{1}{2} R^2 (\sin(\widehat{2A}) + \sin(\widehat{2B}) + \sin(\widehat{2C})) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } k = \frac{1}{2} R^2$$

$$\text{Ainsi } \frac{\text{Aire}(MBC)}{\sin(\widehat{2A})} = \frac{\text{Aire}(OBC)}{\sin(\widehat{2A})} = \frac{1}{2} R^2$$

et en conséquence $\text{Aire}(MBC) = \text{Aire}(OBC)$.

On en déduit que M est sur la parallèle à (BC) passant par O .

De la même façon M est sur la parallèle à (AB) passant par O , d'où nécessairement $M = O$, cqfd.

Remarques :

1) L'exercice donne deux cas particuliers du théorème qui énonce qu'étant donnés trois points A , B et C non alignés, tout point M intérieur au triangle ABC est le barycentre des points A , B et C affectés de masses proportionnelles aux aires de MBC , MAC et MAB . Ce théorème peut se démontrer élémentairement utilisant Thalès, les élèves de premières n'ayant plus à leur disposition ni produit vectoriel, ni déterminants.

2) Si on introduit les aires algébriques $\text{Aire}(ABC) = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC})}{2}$ le résultat s'étend à tous les points du plan.

VARIANTES

QUESTION 1 :

Variante 1 : cf. figure déjà tracée.

$\text{Aire}(ABI) = \text{Aire}(ACI)$ (« bases » IB et IC égales, même hauteur AH)

$\text{Aire}(GBI) = \text{Aire}(GCI)$ (Idem, avec GK)

Par soustraction membre à membre :

$$\text{Aire}(ABG) = \text{Aire}(ACG)$$

G jouant le même rôle pour les trois côtés, on a aussi : ... = $\text{Aire}(GBC)$

(En conclusion chacune des trois aires est le tiers de celle de ABC)

Variante 2 :

Comparons les aires des triangles GAB et GAC en utilisant leur côté commun AG , et les hauteurs correspondantes BT et CT'

I milieu de $[BC]$, donc aussi de $[TT']$, projeté de $[BC]$ sur (AI) .

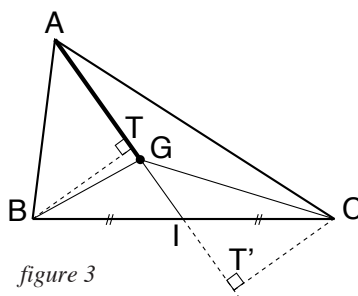


figure 3

$BTCT'$ est donc un parallélogramme et $BT = CT'$.

D'où ...

(Pour établir que I est le milieu de $[TT']$, on peut aussi utiliser le fait qu'il est centre de symétrie de $[BC]$, donc aussi des parallèles (BT) et (CT') , etc. On pourrait aussi utiliser un « cas d'isométrie » des triangles rectangles BTI et $CT'I$).

QUESTION 2 :

Variante 1 :

Soit $M \neq G$, avec la même propriété.

M appartient alors à l'une des régions triangulaires numérotées ci-contre ①, ②, ..., bords possibles, sauf G .

Supposons par exemple M dans ⑤.

Alors G est intérieur au triangle MAB .

Donc $\text{Aire}(MAB) > \frac{1}{3} \text{Aire}(ABC)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Même type de raisonnement pour les diverses régions.

Donc $M = G$.

Variante 2 :

Reprenons la figure 3 en ne supposant plus G centre de gravité (appelons-le M) et en gardant I comme intersection de (AM) et (BC)

Au départ, ici, on ignore si $IB = IC$.

Mais l'égalité des aires de ABM et ACM induit $BTCT'$ est un parallélogramme, donc que I est le milieu de $[BC]$.

Etc. : M est sur la médiane issue de A , donc aussi sur celle issue de B , ... et M est le centre de gravité.

QUESTION 3

Etude directe :

La méthode indiquée dans la solution initiale semble, de loin, la plus « évidente » et la meilleure.

Mais, avec quelque pénibilité en plus, la variante 2 de la QUESTION 1 conduit aussi au résultat. Ainsi :

$$\text{Aire}(OAB) = \frac{1}{2} OA \times BT.$$

Or, en utilisant le triangle rectangle OBT :

$$BT = R \sin \widehat{BOT} = R \sin \widehat{AOB}$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{Aire}(OAB) &= \frac{1}{2} R^2 \sin \widehat{AOB} \\ &= \frac{1}{2} R^2 \sin(\widehat{2C}) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

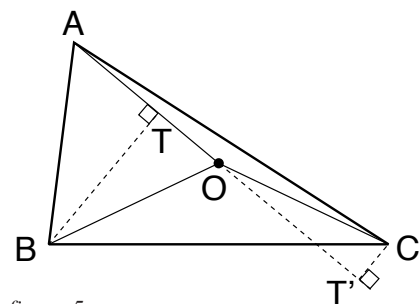
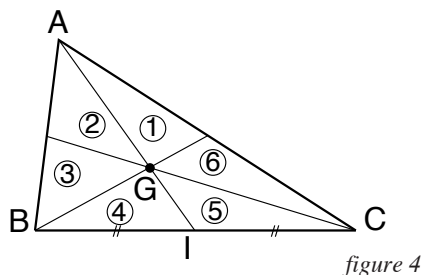


figure 5

Quant à l'unicité de O pour la proportionnalité trouvée, celle-ci pouvant s'écrire, le triangle ABC étant acutangle :

$$\frac{\text{Aire}(OBC)}{\sin(\widehat{2A})} = \frac{\text{Aire}(OAB)}{\sin(\widehat{2C})} = \frac{\text{Aire}(OAC)}{\sin(\widehat{2B})} = \frac{\text{Aire}(ABC)}{\sin(\widehat{2A}) + \sin(\widehat{2B}) + \sin(\widehat{2C})}$$

pour tout O' vérifiant la relation, $\text{aire}(O'AB) = \text{aire}(OAB)$.

Comme dans « la variante 1 » de la QUESTION 2, une démonstration par l'absurde donne immédiatement $O' = O$.

COMMENTAIRES

Il s'agit d'un « bon » problème :

- 1° très facile, niveau Collège, et avec plusieurs voies d'accès,
- 2° déjà moins facile mais toujours accessible par plusieurs chemins,
- un 3° de transfert qui remplace l'égalité par une proportionnalité avec, à travers un zeste de trigonométrie, toujours à peu près les même méthodes...

Un problème « gratifiant »...