

SOLUTION 1

a) Les trois formes sont : le carré, le triangle équilatéral et l'hexagone.

La démonstration, qui n'était pas demandée, part du principe que si on accole p formes identiques en un sommet A , l'angle de la forme en ce sommet étant a , on a $p \times a = 2\pi$ et d'autre part, puisque c'est un polygone régulier, si n est le nombre de côtés, on a : $a = \pi \times \frac{(n-2)}{n}$.

d'où $p \times (n-2)$, soit $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ avec p et n entiers naturels supérieurs à 2.

Seuls les couples $(3 ; 6)$, $(4 ; 4)$, $(6 ; 3)$ conviennent d'où le résultat.

b) Parmi ces figures qui réalisent un pavage du plan par des polygones réguliers, c'est l'hexagone régulier qui a le plus petit périmètre. En effet :

- pour le carré : si a est le rayon du cercle circonscrit,

$$\text{le périmètre est } p_4 = 4a\sqrt{2}$$

$$\text{et l'aire est } A_4 = 2a^2.$$

- pour le triangle équilatéral : si b est le rayon du cercle circonscrit,

$$\text{le périmètre est } p_3 = 3b\sqrt{3}$$

$$\text{et l'aire est } A_3 = \frac{3\sqrt{3} b^2}{4}$$

- pour l'hexagone régulier : si c est le rayon du cercle circonscrit,

$$\text{le périmètre est } p_6 = 6c$$

$$\text{et l'aire est } A_6 = \frac{3\sqrt{3} c^2}{4}$$

Les aires doivent être égales, d'où : $2a^2 = \frac{3\sqrt{3}b^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}c^2}{2}$.

On compare p_4 et p_3 et on obtient $\left(\frac{p_4}{p_3}\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0,769$.

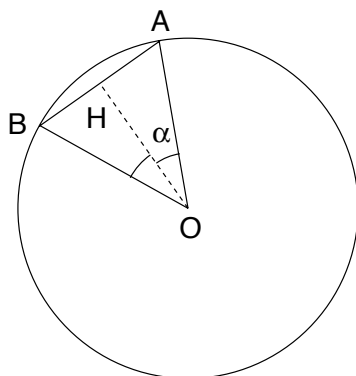
Puis on compare p_4 et p_6 et on obtient : $\left(\frac{p_4}{p_6}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15$.

Donc $p_3 > p_4 > p_6$.

On peut aussi, partant d'une aire égale à 1, comparer les périmètres, après avoir exprimé le côté en fonction de l'aire.

Pour le carré, le périmètre est 4, pour le triangle équilatéral, le périmètre est $\sqrt{12\sqrt{3}}$ et pour l'hexagone, le périmètre est $\sqrt{8\sqrt{3}}$. Il est alors facile de comparer les trois périmètres pour conclure.

SOLUTION 2, pour b)



Soit un polygone régulier convexe de n côtés AB , et R le rayon du cercle circonscrit.

Recherchons une relation générale entre l'aire S et le périmètre p .

$$\alpha = \frac{\pi}{n}$$

$$S = nR^2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$p = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\text{D'où } p^2 = 4nS \tan \frac{\pi}{n}$$

$$\text{Pour } n = 3, \quad \tan \frac{\pi}{n} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad p_3^2 = 12S\sqrt{3}$$

$$\text{Pour } n = 4, \quad \tan \frac{\pi}{n} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{et} \quad p_4^2 = 16S$$

$$\text{Pour } n = 6, \quad \tan \frac{\pi}{n} = \cotan \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad p_6^2 = 24 \frac{S}{\sqrt{3}} = 8S\sqrt{3}$$

De là...

COMMENTAIRES

1) Sur les trois cas particuliers traités, on peut remarquer, qu'à aire égale, le polygone régulier a un périmètre d'autant plus petit qu'il est « voisin » du cercle. Corrélativement, à périmètre égal, l'aire sera alors d'autant plus grande. Ce qui correspond aux villes « en rond » des temps jadis où, à longueur de remparts égale, mieux valait avoir l'aire la plus grande.
A comparer avec les rectangles de même aire, ... quand ils prennent la forme carrée ...

2) Le cas général ci-dessus esquissé exigerait l'étude de la variation de $n \tan \frac{\pi}{n}$.

3) **La cellule académique signale que :**

« Un élève a prouvé qu'il n'y a que trois polygones pouvant paver le plan, ce qui n'était pas demandé, mais cela lui a rapporté un *bonus*.

Pour la question suivante, la difficulté, pour beaucoup, a été de trouver l'aire de l'hexagone. On peut signaler la *méthode d'un élève* qui a enlevé trois triangles équilatéraux de côté a , d'un triangle de côté $3a$ et qui a prouvé qu'on obtient bien un hexagone régulier.

Pour comparer les périmètres, deux élèves sur 120 ont pensé à prendre une aire commune ».

PALMARÈS

12 élèves (sur 120) ont été primés.

1^{er} prix :	<i>Alexandre BORITCHEV</i>	lycée Magendie, Bordeaux
2^{ème} prix :	<i>Gheorghe DIMKA</i>	lycée Magendie, Bordeaux
3^{ème} prix :	<i>Artem CHILIAKOV</i>	lycée Louis Barthou, Pau

P.S. On retrouve les deux premiers dans le palmarès national.