

SOLUTION

Comme $5^2 = 3^2 + 4^2$, on a $5^{2002} = (3^2 + 4^2)^{1001}$.

Or, pour $a > 0$ et $b > 0$,

$$(a + b)^{1001} = (a + b) \dots (a + b) > a^{1001} + b^{1001}$$

Donc $5^{2002} > 3^{2002} + 4^{2002}$.

VARIANTE

(due à François Lo JACOMO)

Comme $5^2 = 3^2 + 4^2$, on a $5^{2002} = 5^2 \times 5^{2000}$

$$= (3^2 + 4^2) \times 5^{2000}$$

$$= 3^2 \times 5^{2000} + 4^2 \times 5^{2000}$$

$$\text{Donc } 5^{2002} > 3^2 \times 3^{2000} + 4^2 \times 4^{2000}$$

$$\text{Soit } 5^{2002} > 3^{2002} + 4^{2002}$$

REMARQUES DE L'ÉQUIPE ACADÉMIQUE

« Indépendamment du clin d'œil à l'année 2002, ... , l'équipe pensait (à tort !) avoir choisi un exercice abordable par de nombreux participants ».

Michel TIXIER ajoute :

« Les résultats furent décevants, à l'exception des deux premiers candidats. Le triplet pythagoricien (3 ; 4 ; 5) n'est pas du tout dans la tête des élèves.

Quant au fait que $a, b > 0$ entraînent $(a + b)^n > a^n + b^n$, seul le premier lauréat imagine cette inégalité et la démontre parfaitement.

COMMENTAIRE

L'idée de base du problème est, pour chacune des solutions proposées, l'introduction de $5^2 = 3^2 + 4^2$, égalité célèbre dite « du triangle (3 ; 4 ; 5) » et qui donc, peut venir spontanément à l'esprit.

Sinon, pourquoi ne pas essayer d'abord avec les exposants 1, 2, 3, 4, ... pour comparer 5 à $3 + 4$, 5^2 à $3^2 + 4^2$, 5^3 à $3^3 + 4^3$, etc. s'il le faut ... ? La conjecture apparaît vite et l'ancrage sur $5^2 = 3^2 + 4^2$ peut s'insinuer...

A défaut, les essais peuvent induire la démarche suivante :

Dès l'exposant 3, $5^3 > 3^3 + 4^3$.

Chaque augmentation de 1 de l'exposant fait multiplier le premier membre par 5 et le second par un nombre inférieur à 4 (puisque le premier de la somme ne l'est que par 3). Donc l'inégalité ne peut que s'accroître ...

L'utilisation de $5^2 = 3^2 + 4^2$ ne s'impose donc pas, ce qui rend l'exercice plus ouvert.

PALMARÈS ACADÉMIQUE

1^{er} prix :	<i>Mathieu MANGION</i>	lycée Michelis, Amiens
2^{ème} prix :	<i>Robin FISK</i>	lycée Marie Curie, Nogent
3^{ème} prix :	<i>Mylvaganam MAYVRATHAN</i>	lycée Marie Curie, Nogent

(N.B. le premier prix a été 4^{ème} accessit au palmarès national).