

Inventaire :

Rectangle égaux $D'A'LK$, $DCJI$

Trapèzes rectangles égaux $D'A>ID$, $DCKD'$

Trapèzes égaux $LA'IJ$, $JCKL$

D'où les correspondances

$I \quad J \quad C \quad D \quad D'A' \quad L \quad K$

$K \quad L \quad A' \quad D'D \quad C \quad J \quad I$

S'il y a un axe (D) de symétrie, les couples symétriques sont :

$(I,K), (J,L), (C,A'), (D,D')$

Soit M le milieu de $[DD']$ et O , le centre du cube, milieu de $[CA']$.

Dans le triangle $DD'B'$, (MO) joint les milieux de deux côtés.

Donc $(MO) \parallel (D'B')$

De là : $(MO) \perp (DD')$, donc (MO) médiatrice de (DD') .

$(MO) \perp \text{plan } A'C'CA$, donc $(MO) \perp (A'C)$ et (MO) est la médiatrice de $[CA']$.

Il s'ensuit, en utilisant les couples (D,D') et (C,A') que, s'il y a un axe de symétrie (D) , il s'agit de (MO) .

(MO) est-elle bien axe de symétrie ?

(MO) étant perpendiculaire au plan $ACC'A'$ en O , centre du rectangle $ACC'A'$, dans la symétrie d'axe (MO) :

$$D \rightarrow D' \qquad B \rightarrow B'$$

$$A \rightarrow C' \qquad C \rightarrow A'$$

$$\text{De là :} \qquad [D'C'] \rightarrow [DA] \qquad K \rightarrow I$$

$$[A'B'] \rightarrow [CB] \qquad L \rightarrow J.$$

Donc le solide a bien (MO) comme axe de symétrie.

VARIANTE D'EXPOSITON

(due à François Lo Jacomo)

Le solide ainsi construit possède deux sommets et deux seulement, à savoir D et D' , d'où les trois arêtes sont deux à deux perpendiculaires : en effet, les angles $D'A'I$ et DCK sont manifestement aigus, donc $D'KC$ et DIA' obtus, et (JL) n'est perpendiculaire ni à la face $D'A'LK$ ni à la face $DCJI$. Si la symétrie d'axe Δ transforme ce solide en lui-même, soit il laisse invariants D et D' (impossible car (DD') n'est pas axe de symétrie), soit il transforme D en D' .

L'arête DC est alors transformée en une arête de même longueur et de sommet D' , donc nécessairement $D'A'$, si bien que Δ doit passer par le milieu de $[DD']$ et le milieu de $[CA']$ (le centre du cube). Il reste à vérifier que cette droite Δ est bien un axe de symétrie du solide : la symétrie par rapport à Δ transforme DI en $D'K$ et le rectangle $IDCJ$ en le rectangle $KD'A'L$, ce qui achève la démonstration.

COMMENTAIRES

Voilà un bon exercice de vision dans l'espace qui valorise la géométrie dans l'espace à partir d'un solide familier. Simple, il n'en fait pas moins appel à d'intéressantes méthodes déductives et des connaissances de base.

• **Joël Grand, responsable de la cellule académique** précise la surprise suivante des correcteurs de l'épreuve académique :

« Plusieurs élèves font un raisonnement juste en comparant les surfaces pour détecter celles qui sont égales et, donc, conclure pour les symétries.

Mais, au moment de conclure, c'est :

- soit le trou,
- soit une conclusion bizarre, sans accord avec le reste ».

PALMARÈS

Deux premiers prix, à égalité :

Rémy BONNET
Pierre LAFFITE

Lycée E. Zola - Aix
Lycée Lacordaire - Marseille.