

ACADÉMIE DE VERSAILLES

ÉNONCÉ

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

- 1) Démontrer que l'équation $x^n + x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution positive, que l'on notera u_n .
- 2) Montrer que pour tout élément de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq u_n \leq \alpha$, où α est la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.
- 3) Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on a : $(u_n)^n + (u_n - \alpha)(u_n + \frac{1}{\alpha}) = 0$.
- 4) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
- 5) Montrer que la suite (u_n) est croissante.