

1) Démontrons que l'équation $x^n + x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution positive, que l'on notera u_n .

On pose $f(x) = x^n + x + x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = nx^{n-1} + 2x + 1 > 0$ si $x > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

f est dérivable et strictement croissante sur $[0 ; 1]$ $\left| \begin{array}{l} \text{donc } f \text{ réalise une bijection de} \\ f(0) = -1 \text{ et } f(1) = 2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} [0 ; 1] \text{ sur } [-1 ; 2] \end{array} \right.$

Or $0 \in [-1 ; 2]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $[-1 ; 2]$.

Donc l'équation $x^n + x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrons que pour tout élément de $\mathbb{N}^*$: $0 \leq n_n \leq \alpha$, où α est la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

$x^2 + x - 1$ a pour racines $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$: l'unique solution positive

de cette équation est donc $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ainsi $f(\alpha) = \alpha^n + \alpha^2 + \alpha - 1 = \alpha^n > 0$ donc, puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: $u_n < \alpha$.

3) Montrons que $(u_n)^n + (u_n - \alpha)(u_n + \frac{1}{\alpha}) = 0$.

$$(u_n - \alpha)(u_n + \frac{1}{\alpha}) = u_n^2 + u_n(-\alpha + \frac{1}{\alpha}) - 1 \text{ et } \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \text{ donc } -\alpha + \frac{1}{\alpha} = 1$$

$$\text{et } (u_n)^n + (u_n - \alpha)(u_n + \frac{1}{\alpha}) = (u_n)^n + u_n^2 + u_n - 1 = f(u_n) = 0.$$

4) Etude de la limite de la suite (u_n) .

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq (u_n)^n \leq \alpha^n \\ 0 < \alpha < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n = \alpha$ d'après les théorèmes d'encadrement.

5) Montrons que la suite (u_n) est croissante.

$$(u_{n+1})^{n+1} + (u_{n+1})^2 + u_{n+1} - 1 = 0,$$

$$\text{donc : } (u_{n+1})^{n+1} - (u_{n+1})^n + (u_{n+1})^n + (u_{n+1})^2 + u_{n+1} - 1 = 0$$

$$\text{puis } f(u_{n+1}) = (1 - u_{n+1})(u_{n+1})^n.$$

$$\text{Or } (1 - u_{n+1})(u_{n+1})^n > 0 \text{ car } 0 < u_n < 1$$

$$\text{donc } f(u_{n+1}) > 0$$

et, puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(u_n) = 0 : u_{n+1} > u_n$.

COMMENTAIRES

Sujet abordable, mais :

- L'aménagement du programme pour l'année scolaire 2000-2001 a supprimé le paragraphe sur les notions de comparaison dans le chapitre sur les suites et fonctions numériques. Le théorème dit « des gendarmes » ne figure donc plus dans le bagage des élèves de première.

Dans ces conditions, la question 4 ne pouvait être rédigée correctement par un élève qui n'aurait pas fait du hors programme.

- Il faut noter aussi que certains élèves n'avaient pas encore traité les suites au moment de cette épreuve.

LE KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

Depuis 12 ans le jeu-concours **Kangourou des Mathématiques** fait concourir chaque année un demi-million de jeunes en France.

Et, en 2001, il a eu lieu dans 26 pays d'Europe où il a réuni 2 250 000 participants. Il s'agit aujourd'hui d'un concours populaire bien connu qui permet une importante diffusion de culture mathématique : plus de 500 000 brochures et 100 000 livres sont ainsi distribués en France.

Ainsi que le souligne Monsieur Jack Lang, Ministre de l'Éducation Nationale :
« Je me réjouis que le Kangourou des Mathématiques soit l'occasion d'une célébration des mathématiques, dont l'importance dans le développement de la science comme dans la vie de tous les jours n'est pas à démontrer, l'intérêt de telles opérations étant de rendre les mathématiques aimables, familières et vivantes aux yeux des élèves. Ce concours touche un vaste public d'élèves de tous les niveaux avec, en arrière plan, une dimension internationale qui souligne que les mathématiques créent du consensus et se jouent des frontières. »

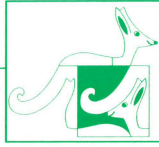
Depuis plusieurs années, en effet, les premiers jeunes français de chaque niveau participent à des échanges avec les lauréats d'autres pays européens : en Angleterre, Bulgarie, Hongrie, Pologne, et France. C'est à l'occasion de tels échanges, mais aussi des rallyes régionaux, et des stages soutenus par le Kangourou, que les bons élèves de mathématiques ont ainsi pu se connaître les uns les autres.

Et finalement, que les quatre premiers et la plupart des accessits du palmarès national des Olympiades Académiques de Première-2001 sont des habitués du Kangourou bien connu de lui. Il est intéressant et réconfortant de noter les corrélations qui peuvent ainsi exister entre les résultats de différentes compétitions de nature très différentes.

On le voit donc, il était naturel que les éditions du Kangourou co-éditent ces premières annales...

L'équipe du Kangourou des mathématiques se réjouit de participer ainsi à l'éducation de nos jeunes matheux et à la diffusion de livres de formation et de culture pour tous aussi bien que pour les meilleurs.





Livres de problèmes, énigmes et curiosités, édités par ACL-Les Éditions du Kangourou pour les lycées :

Annale du Kangourou lycées 1997-1998	64 p.	7,5 €
Annales du Kangourou lycées 199-2000	64 p.	7,5 €
Annales du Kangourou 2001	32 p.	3,8 €
La jubilation en mathématiques	32 p.	5,0 €
Rallye mathématique du Centre	64 p.	9,5 €
Apprivoiser l'infini	96 p.	11,5 €
Faites vos jeux	64 p.	8,0 €
LES MATHÉMATIQUES DU CLUB OLYMPIQUE KANGOUROU	256 p.	22,5 €

Le livre pour les lycéens qui souhaitent progresser dans la résolution de problèmes, avec les corrigés, des commentaires heuristiques et historiques, des méthodes générales et des astuces particulières.

ACL - Les Éditions du Kangourou
12, rue de l'Épée de Bois - 75005 Paris
www.mathkang.org



- N° 97 « **JEUX 4 - DE L'INTÉRÊT DES PROBLÈMES DE RALLYE** » - 1995-
164 pages en A5. Prix : 16,30 € ; **Prix adhérent : 11,45 €.**
Historique (5 pages) ; Buts de tels problèmes (5 pages) ; Les 129 problèmes de la brochure (40 pages) ; Observation des élèves (40 pages, par exemple « Autour d'un problème "ouvert" en 1^{ère} S ») ; Précisions sur les intentions (36 pages) ; Création d'énoncés (9 pages) ; Emergence de méthodes (20 pages) ; ...
- N° 451 « **CONCOURS AUSTRALIEN DE MATHÉMATIQUES, Énoncés, corrigés, % de réussite** »...Co-édition APMEP. - 1999 - 256 pages en 17 × 24.
Prix : 15,85 € ; **Prix adhérent : 11 €.**
Moitié Collèges, moitié Lycées, avec près de 200 énoncés, certains dans les deux parties, mais alors de deux points de vue différents, sans doublons...
Quatre rubriques dans chaque partie : Equations ; Dénombrements ; Quand les choses bougent ; Géométrie. Les énoncés australiens originaux (souvent enrichis ici) ont été proposés à des « juniors », des « seniors », des « intermédiaires »... Il s'agit du premier-né des Kangourous ! Cf. Bulletin n° 421, p. 157 - 158.