

SOLUTION 1

(abrégée)

Pour $n = 1$: (E) s'écrit $x = 1$.

Pour $n = 2$: (E) s'écrit $x^2 + x - 1 = 0$. Une seule solution positive : $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

En posant $f_n : f_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n$ définie sur $[0 ; +\infty[$; f_n est strictement croissante et dérivable ; $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n$ d'où l'existence et l'unicité.

Du fait que $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$, il ne peut exister de terme de la suite r inférieur à $1/2$.

$f_n(0,51) = \frac{51}{49} (1 - 0,51^n)$ dont la limite est $\frac{51}{49}$. Ceci est supérieur à 1, d'où l'existence.

r_5 est le premier terme inférieur à 0,51.

$f_{n+1}(r_n) = 1 + (r_n)^{n+1}$, donc la suite est décroissante.

Sur $[0 ; 1[$, l'équation (E) équivaut à : $x^{n+1} = 2x - 1$.

Donc, pour $n \geq 5$: $2\left(r_n - \frac{1}{2}\right) < 0,51^n$.

Il existe un entier naturel n tel que $\frac{0,51^n}{2} < 10^{-20}$.

Par exemple, r_{68} est inférieur à $\frac{1}{2} + 10^{-20}$.

SOLUTION 2 (détaillée)

1) Pour $n = 1$, l'équation (E) s'écrit : $x = 1$.

Pour $n \geq 2$, soit f_n la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{p=1}^n x^p$$

f_n est dérivable, strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n > 1$.

Donc l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique sur $]0 ; 1[$.

Comme f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $f_n = 1$ admet une solution unique sur $[0 ; +\infty[$. On note r_n cette solution, qui appartient à $]0 ; 1[$.

2) Pour x différent de 1, on peut écrire $f_n(x) = x \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Alors $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1$

pour tout $n \geq 2$, $r_n \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

On peut remarquer que dans $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$, $f_n(x) = 1$ équivaut à $x - x^{n+1} = 1 - x$ qui équivaut à $x^{n+1} = 2x - 1$.

Ce qui montre que r_n est l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ et de la droite d'équation $y = 2x - 1$. A l'aide de cette interprétation, on peut voir graphiquement que la suite de terme général r_n est strictement décroissante et converge vers $\frac{1}{2}$. Ce qui renseigne sur les réponses à donner aux deux dernières questions.

3) $f_n(0,51) = \frac{51}{49} (1 - 0,51^{n+1})$ dont la limite en $+\infty$ est $\frac{51}{49} > 1$ d'où l'existence d'un entier n tel que $r_n < 0,51$. A la calculatrice, on trouve que $r_4 > 1 > r_5$.

Le calcul confirme que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement décroissante. En effet, $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}$ donc $1 = f_n(r_n) = f_{n+1}(r_{n+1}) = f_n(r_{n+1}) + (r_n)^{n+1}$. Par suite, $f_n(r_n) > f_n(r_{n+1})$ donc $r_n > r_{n+1}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement décroissante. Donc r_5 est le premier terme inférieur à 0,51.

4) Sur $]0 ; 1[$ l'équation (E) équivaut à $x^{n+1} = 2x - 1$. Donc $2\left(r_n - \frac{1}{2}\right) = (r_n)^{n+1}$.

Par suite, pour $n \geq 5$, $2\left(r_n - \frac{1}{2}\right) < 0,51^n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,51^n = 0$, il existe donc un entier naturel n tel que $\frac{0,51^n}{2} < 10^{-20}$;

par exemple, $r_{68} < \frac{1}{2} + 10^{-20}$.

Remarques :

1) Sachant que pour tout $n \geq 2$, $0 < (r_n)^{n+1} < r_2^{n+1}$ et comme $r_2 \in]0 ; 1[$, on peut conclure avec le théorème d'encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (r_n)^{n+1} = 0$.

Comme $(r_n)^{n+1} = 2r_n - 1$, on peut alors en déduire que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente vers $\frac{1}{2}$.

2) Au programme (Mai 1991) de 1^{ère} S ne figure que le résultat : si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$. Les élèves ne pouvaient donc pas calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (r_n)^{n+1}$.

Par contre, à l'aide de l'interprétation graphique donnée plus haut, ils pouvaient « visualiser » le comportement de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et avaient donc ainsi des renseignements sur les réponses à apporter aux deux dernières questions de l'exercice.