

SOLUTION 1

(Solution analytique)

Plaçons-nous dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'origine le centre du cercle, tel que $\vec{i}$ dirige (BC) , de même sens que $\vec{BC}$ et $\vec{j}$ dirige (BA) , de même sens que $\vec{BA}$.

Dans ce repère, les coordonnées de B sont (x_B, y_B) , celles de A sont $(x_B, y_B + 6)$, celles de C sont $(x_B + 2, y_B)$ et le cercle a pour équation : $x^2 + y^2 = 50$.

Les points A et C appartenant au cercle, x_B et y_B vérifient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x_B^2 + (y_B + 6)^2 = 50 \\ (x_B + 2)^2 + y_B^2 = 50 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x_B^2 + (y_B + 6)^2 = 50 \\ 4x_B + 4 - 12y_B - 36 = 50 \end{cases}$$

On en déduit $x_B = 3y_B + 8$, puis en remplaçant dans la première équation, $y_B^2 + 6y_B + 5 = 0$, c'est-à-dire, $(y_B + 1)(y_B + 5) = 0$. On obtient deux positions possibles pour B , de coordonnées $(5, -1)$ ou $(-7, -5)$. Comme B est à l'intérieur du cercle, il faut éliminer la position $(-7, -5)$ et le carré de la distance cherchée est :

$$x_B^2 + y_B^2 = 5^2 + 1 = 26.$$

SOLUTION 2

(Trigonométrie)

Notations :

On désigne par I le milieu de [AC], par v l'angle de [IO] avec [IB] et u l'angle de [AB] avec [AC].

Il s'agit de déterminer le carré de distance OB^2 . Une relation classique, dans le triangle OBI, est :

$$OB^2 = OI^2 + IB^2 - 2 OI \cdot IB \cos v.$$

Or $IB = IC$ et donc

$$OI^2 + IB^2 = OI^2 + IC^2 = R^2.$$

Par ailleurs, v est le complémentaire de l'angle de [IB] avec [IC]. Cet angle est égal à $2u$ (conséquence du théorème des angles au centre et inscrit). Ainsi :

$$\cos v = \sin(2u) = 2 \sin u \cos u.$$

Mais

$$\sin u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \quad \text{et} \quad \cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

D'où :

$$OB^2 = R^2 - 4 OI \cdot IC \frac{c}{a^2 + c^2}$$

En utilisant les relations :

$$IC^2 = \frac{a^2 + c^2}{4} \quad \text{et} \quad OI^2 = R^2 - \frac{a^2 + c^2}{4}$$

il vient finalement :

$$OB^2 = R^2 - ac \sqrt{\frac{4R^2}{(a^2 + c^2) - 1}}$$

Pour les valeurs données par l'énoncé : $R^2 = 50$, $a = 2$ et $c = 6$, on trouve :

$$OB^2 = 50 - 12\sqrt{4} = 26.$$

