

SOLUTION

Dans le triangle ABC, posons :

$$\widehat{ACB} = x, \widehat{ABC} = 2x \text{ (en degrés).}$$

Ainsi :

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - 3x \text{ et } \sin(180^\circ - 3x) = \sin 3x.$$

$$\text{D'où : } \frac{\sin 3x}{BC} = \frac{\sin 2x}{AC} = \frac{\sin x}{AB}$$

$$\text{Donc : } \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{AC}{AB} \text{ soit } 2 \cos x = \frac{AC}{AB} \text{ et}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin(2x + x)}{\sin 2x} = \frac{\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x}{\sin 2x} = \cos x + \frac{\cancel{\sin x} (2 \cos^2 x - 1)}{2 \cancel{\sin x} \cos x}$$

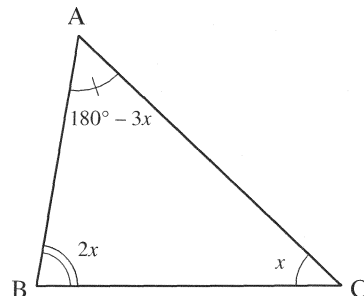
$$\frac{BC}{AC} = 2 \cos x - \frac{1}{2 \cos x} = \frac{AC}{AB} - \frac{AB}{AC} = \frac{AC^2 - AB^2}{AB \cdot AC}$$

$$\text{soit } BC \cdot AB = AC^2 - AB^2.$$

$$\text{On en déduit : } AC^2 = AB(AB + BC).$$

AB, AC et BC sont des entiers, AC étant le plus petit possible ($AC \geq 2$).

- Si $AC = 2$ $AB(AB + BC) = 4$ implique $AB = 1$ et $BC = 3$, impossible car l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.
- Si $AC = 3$ $AB(AB + BC) = 9$ implique $AB = 1$ et $BC = 8$, impossible car l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.



- Si $AC = 4$ $AB(AB + BC) = 16$ implique $AB = 1$ et $BC = 15$ ou bien $AB = 2$ et $BC = 6$, impossible car l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.
- Si $AC = 5$ $AB(AB + BC) = 25$ implique $AB = 1$ et $BC = 24$, impossible car l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.
- Si $AC = 6$ $AB(AB + BC) = 36$ implique :
 $AB = 1$ et $BC = 35$ (impossible car $35 > 6 + 1$),
ou bien $AB = 2$ et $BC = 16$ (impossible car $16 > 6 + 2$),
ou bien $AB = 4$ et $BC = 5$.

Ceci fournit la solution car l'inégalité triangulaire est vérifiée.

On trouve : **$AB = 4$ km, $AC = 6$ km et $BC = 5$ km.**

Une variante de la correction par Henri Bareil

Une autre méthode pour obtenir $AC^2 = AB(AB + BC)$.

1) Je traduis le fait que [BM] est bissectrice :

Soit [BM], M sur [AC], la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

D'après une propriété de la bissectrice déjà implicite dans le sujet national n°2 :

$$\frac{MA}{AB} = \frac{MC}{BC} \text{ donc } = \frac{MA + MC}{AB + AC} \text{ c'est-à-dire } = \frac{AC}{AB + AC}$$

2) Je traduis le fait que $\widehat{C} = x$ et $\widehat{B} = 2x$:

Dans le triangle BMC où $\widehat{BMC}$ est le supplément de $2x$, $\frac{MC}{\sin x} = \frac{BC}{\sin 2x}$,

alors, dans le triangle ABC, $\frac{AB}{\sin x} = \frac{AC}{\sin 2x}$.

$$\text{D'où : } \frac{MC}{BC} = \frac{AB}{AC}.$$

3) En conjuguant 1) et 2), $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB + AC}$.

Ce qui entraîne : $AC^2 = AB(AB + AC)$.