

- Si $p(n) = 0$, on a deux solutions évidentes : $n = 0$ et $n = 2001$.
- Si $p(n) > 0$, comme $n > 0$, $n - 2001$ doit être strictement positif, n ne peut donc être compris entre 0 et 2001.

Recherchons les solutions éventuelles pour $n > 2001$.

Posons
$$n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0.$$

(n est un nombre de $m + 1$ chiffres et les a_i représentent les chiffres de l'écriture décimale de n).

$n \geq a_m 10^m$ car les a_i sont tous positifs ou nuls.

Comme $n > 2001$, on peut dire que $n(n - 2001) \geq n$.

Donc
$$n(n - 2001) \geq a_m 10^m. \quad (1)$$

Comme tous les chiffres représentent des nombres inférieurs ou égaux à 9, on peut dire que $p(n) \leq a_m \times 9 \times 9 \times \dots \times 9$,

c'est-à-dire
$$p(n) \leq a_m \times 9^m. \quad (2)$$

Comme $m \geq 3$, on a
$$10^m > 9^m. \quad (3)$$

Des inégalités (1), (2) et (3), on conclut que $n(n - 2001) > p(n)$ pour tout $n > 2001$, donc l'équation proposée n'a pas de solution pour $n > 2001$.

Conclusion : Les seules solutions possibles sont 0 et 2001

Remarque :

Plusieurs candidats ont été perturbés par des imprécisions de l'énoncé :

- le “blanc” séparant 2001 et n a été interprété de différentes façons et a fait beaucoup de dégâts !
- n a souvent été considéré comme un nombre entier relatif.

- “base décimale” n'est pas connu de tous et “produit de chiffres” a laissé perplexes certains : “les chiffres sont des symboles ; comment peut-on faire des produits de symboles ?”

Sur les 189 participants de l'académie, 111 n'ont rien rédigé sur cet exercice, 43 ont fait quelque chose sans rien trouver de bon, 26 ont trouvé les deux solutions, 9 ont fait de bonnes choses et 2 ont bien réussi.

**Commentaire
de Jean-Claude Emeillat**

La réponse est instantanée pour l'élève subtil qui voit que $p(n) \leq n$ pour tout n . D'autre part, l'égalité $n(n - 2001) = p(n)$ implique $p(n) = 0$ et donc $n = 0$ ou $n = 2001$.

Cet exercice est, à coup sûr, un bon moyen pour détecter les élèves astucieux.