

SOLUTION

Soit L_n le numéro de la ligne où se trouve la carte choisie à la $n^{\text{ème}}$ répartition obtenue sur la table. Initialement, les valeurs possibles de L_1 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7.

Appelons “boîte” la colonne contenant la carte choisie, située dans le paquet de cartes obtenu juste avant de répartir les cartes sur la table. Dans cet exemple, cette boîte se trouve au milieu du paquet, donc en $2^{\text{ème}}$ position sur les 3 possibles.

Le tableau suivant donne les valeurs de L_n en fonction de L_{n-1} :

L_1	1	2	3	4	5	6	7
L_2	3	3	4	4	4	5	5
L_3	4	4	4	4	4	4	4

A la $3^{\text{ème}}$ itération le magicien est donc certain de trouver la carte choisie, car elle se trouve à la $4^{\text{ème}}$ ligne.

Soit k le numéro de position de la boîte ($1 \leq k \leq p$). Dans l'exemple ci-dessus, $k = 2$.

On trouve $L_{n+1} = E \left[\frac{q(k-1) + L_n + p - 1}{p} \right]$ (où E désigne la partie entière).

Posons : $f(x) = E(ax + b)$ avec $a = \frac{1}{p}$ et $b = \frac{q(k-1) + p - 1}{p}$

On a : $L_{n+1} = f(L_n)$. Comme f est croissante, il y a 3 cas :

1) Si $L_1 = L_2$ alors : $\forall n \in \mathbb{N} : L_n = L_1$.

2) Si $L_2 > L_1$ alors : $1 \leq L_1 < L_2 \leq \dots \leq L_n \leq \dots \leq q$.

(L_n) est donc constante à partir d'un certain rang .

3) Si $L_2 < L_1$ alors : même conclusion (avec (L_n) décroissante).

(L_n) converge donc vers une valeur $x \in \mathbb{N}$ vérifiant $x = f(x)$.

On en déduit : $m < x \leq M$ avec $m = \frac{b-1}{1-a}$ et $M = \frac{b}{1-a}$.

Mais $d(M; n) = \frac{1}{1-a} = \frac{p}{p-1}$, il existe donc un seul entier, voire au maximum 2, vérifiant ces conditions, ceux-ci étant consécutifs.

La boîte contient donc 1 ou 2 positions stables. Il se peut donc qu'une carte, voire deux, s'accroche(nt) à ces positions "refuges". Mais ceci ne pourrait durer. En effet, la carte élue, pas à pas, finira par occuper celle-ci ou l'une de celles-ci et y restera définitivement à partir d'un nombre d'itérations N suffisamment grand.

Fixons ce nombre N à : $N = \max [q - E(M) ; E(M) - 1]$.

A partir de cet "instant", même si, au pire, une intruse occupait l'autre position stable de cette boîte, le coup après, elle en serait éjectée, pourvu qu'il y ait plus de deux colonnes. Ce qui est le cas.

Conclusion : La carte choisie est donc celle qui se trouve, à la $N^{\text{ème}}$ et $(N+1)^{\text{ème}}$ itération, à la même place.

N.B. il est sans doute possible de minimiser N (?).