

SOLUTION

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{y+2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{y+2}.$$

Or, $y \geq 1$ donc $\frac{1}{y+2} \leq \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{x+2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$x < 4.$$

De la même façon, on conclut que $y < 4$.

Il reste à étudier, pour x et y compris entre 1 et 3, les couples (x, y) qui correspondent à des valeurs entières de z ; on trouve les triplets suivants :

$$(1, 1, 4) ; (1, 2, 10) ; (1, 3, 28) ; (2, 1, 10) ; (3, 1, 28).$$

VARIANTE

Après un calcul élémentaire, on peut exprimer z en fonction de x et y .

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{4-xy}{2xy+4x+4y+8} \\ z &= \frac{4xy+4x+4y}{4-xy}. \end{aligned}$$

Le numérateur étant positif, z ne peut être un entier positif qu si $xy < 4$. Comme x et y sont entiers, on en déduit que, nécessairement :

$$x < 4 \text{ et } y < 4.$$

Il reste à étudier, pour xy compris entre 1 et 3, les couples (x, y) qui correspondent à des valeurs entières de z ; on trouve les triplets suivants :

$$(1, 1, 4) ; (1, 2, 10) ; (1, 3, 28) ; (2, 1, 10) ; (3, 1, 28).$$