

SOLUTION 1

Pour deux avions $D = R(1 + 0,5)$ car au bout d'un trajet de $0,5R$, un avion vide ses réservoirs dans l'autre et se pose.

Supposons que pour n avions on ait : $D = R(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$.

Alors s'il y a $(n + 1)$ avions, après un trajet de $\frac{R}{n + 1}$ un avion vide ses cuves dans les n autres et nous sommes ramenés au problème précédent.

Bien entendu, on n'attend pas un raisonnement par récurrence de la part des élèves d'où la ...

SOLUTION 2

(Michel London)

Tout d'abord, il convient de remarquer que pour n avions, la quantité de carburant est évidemment multipliée par n et que ce carburant est d'autant moins consommé que des avions se posent.

Avec deux avions : à $\frac{R}{2}$, ils ont chacun leur réservoir à moitié vide. En remplissant le réservoir de l'un d'eux par ce qu'il reste dans le réservoir de l'autre, on obtient :

$$D = \frac{R}{2} + R = R \left[1 + \frac{1}{2} \right].$$

Avec 3 avions : à $\frac{\mathbf{R}}{3}$, ils ont chacun leur réservoir aux $\frac{2}{3}$ plein, l'un d'entre eux peut remplir le réservoir des deux autres et l'on retrouve la situation précédente, d'où :

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{R}}{3} + \frac{\mathbf{R}}{2} + \mathbf{R} = \mathbf{R} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right].$$

En généralisant :

Avec n avions, on a :

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right].$$