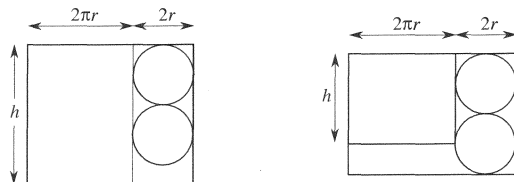


SOLUTION

1. Pour utiliser le minimum de place, il y a trois façons de placer le rectangle et les deux cercles permettant de construire le cylindre :

Première méthode.



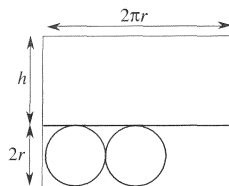
1er cas : $h \geq 4r^2$

$$\text{Perte 1} = 2rh - 2\pi r^2$$

2ème cas : $h \leq 4r^2$

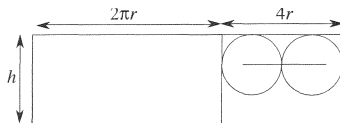
$$\begin{aligned} \text{Perte 2} &= (2\pi r + 2r)4r - 2\pi rh - 4\pi r^2 \\ &= (6\pi + 8)r^2 - 2\pi rh. \end{aligned}$$

Deuxième méthode.



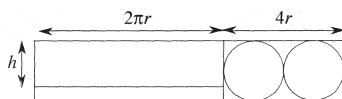
$$\begin{aligned} \text{Perte 3} &= 2\pi r 2r - 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r^2. \end{aligned}$$

Troisième méthode.



Si $h \geq 2r$, alors :

$$\text{Perte 4} = 4rh - 2\pi r^2$$



Si $h \leq 2r$, alors :

$$\begin{aligned} \text{Perte 5} &= 2r(2\pi r + 4r) - 2\pi r h - 2\pi r^2 \\ &= 2r(\pi r + 4r - \pi h). \end{aligned}$$

Comparaison des trois méthodes :

• Comparons les méthodes 1 et 2 :

Perte 1 – Perte 3 = $2rh - 4\pi r^2 = 2r(h - 2\pi r)$ donc la première méthode est plus intéressante quand $h < 2\pi r$ et $h > 4r$.

Perte 2 – Perte 3 = $(4\pi + 8)r^2 - 2\pi r h = 2r((2\pi + 4)r - \pi h)$, donc la première méthode de la plus intéressante si $h > \frac{2\pi + 4}{\pi} r$ ou $h < 4r$.

• Comparons maintenant avec la méthode 3 :

Si $4r < h < 2\pi r$: Perte 4 – Perte 1 = $4rh - 2\pi r^2 - 2rh + 2\pi r^2 = 2rh$.

Si $\frac{2\pi + 4}{\pi} r < h < 4r$: Perte 4 – Perte 2 = $4rh - 2\pi r^2 - (6\pi + 8)r^2 + 2\pi r h$
 $= 2r((2 + \pi)h - 4(\pi + 1)r)$.

La méthode 1 est donc plus intéressante quand $\frac{2\pi + 4}{\pi} r < h < 4r$.

Si $h > 2\pi r$ ou $2r < h < \frac{2\pi + 4}{\pi} r$:

Perte 4 – Perte 3 = $4rh - 2\pi r^2 - 2\pi r^2 = 4r(h - \pi r)$.

Si $h \leq 2r$: Perte 5 – Perte 3 = $2r(\pi r + 4r - \pi h) - 2\pi r^2 = 2r(4r - \pi h)$

Donc la méthode 3 est plus intéressante quand $\frac{4}{\pi} r < h \leq 2r$.

Conclusion :

	$h < \frac{4}{\pi} r$	$\frac{4}{\pi} r \leq h \leq \pi r$	$\pi r \leq h \leq \frac{2\pi + 4}{\pi} r$	$\frac{2\pi + 4}{\pi} r \leq h \leq 2\pi r$	$2\pi r < h$
Perte minimum	2ème méthode	3ème méthode	2ème méthode	1ère méthode	2ème méthode

2. Première méthode :

Si $h \geq 4r$

Aire = $2(\pi + 1)rh$ et $h = \frac{V}{\pi r^2}$ donc $A(r) = \frac{2(\pi + 1)V}{\pi r}$ sur $\left[0; \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}\right]$ et, par conséquent, A admet un minimum pour :

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \text{ et } h = 4 \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \text{ et l'aire sera égale à } \frac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}} \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$$

$$\text{Si } h \leq 4r$$

$$\text{Aire} = 2(\pi + 1)z4r \text{ donc } A(r) = 8(\pi + 1)r^2, \text{ sur } \left[\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}; +\infty\right[\text{ et par conséquent,}$$

$$A \text{ admet un minimum pour } h = 4 \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \text{ et } r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \text{ et l'aire sera égale à } \frac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}} \left(1 + \frac{1}{\pi}\right).$$

Deuxième méthode :

Le volume V étant fixé, l'aire de la plaque est :

$$A = 2\pi r(h + 2r) = 4\pi r^2 + \frac{2V}{r} \quad \text{et} \quad A'(r) = 8\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{8\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

$$\text{donc l'aire sera minimum pour } r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \text{ et l'aire sera égale à } \frac{3V}{\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}}.$$

Troisième méthode :

$$\text{Si } h \geq 2r$$

$$A = (2\pi r + 4r) \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2\pi + 4}{\pi r} V$$

$$\text{donc on étudie } A \text{ sur } \left]0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right[\text{ donc } A \text{ sera minimum en } \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ et l'aire sera égale à :}$$

$$\frac{2\pi + 4}{\pi \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} V = \frac{2\pi + 4}{\sqrt[3]{2} \pi \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}} V.$$

$$\text{Si } h \leq 2r$$

$$A = 2r(2\pi r + 4r), \text{ donc sur } \left[\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; +\infty\right[\text{ } A \text{ sera minimum en } \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ et l'aire sera égale à : } \frac{2\pi + 4}{\sqrt[3]{2} \pi \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}} V.$$

Conclusion : Pour que l'aire de la plaque soit minimum, il faudra choisir la **troisième méthode**, en prenant $h = 2r$.