

SOLUTION

(A. Ouardini)

En remplaçant successivement m par 0 et 1, on obtient pour n entier naturel quelconque :

$$f(n) = f(f(n)) + f(f(0)), \quad f(n+1) = f(f(n)) + f(f(1)).$$

Donc :

$$f(n+1) - f(n) = f(f(1)) - f(f(0)) = \text{Cte.}$$

ainsi, f est “affine” et par suite il existe deux entiers a et b tels que pour tout entier naturel n :

$$f(n) = an + b.$$

En remplaçant $f(n)$ par $an + b$ dans l'équation, on obtient, après simplification :

$$a(m+n) = a(am+b) + a(an+b) + b$$

pour tous m, n entiers naturels.

Pour $(m, n) = (0, 1)$ et $(m, n) = (0, 0)$, on a :

$$2ab + b = 0 \text{ et } a = a^2 + 2ab + b$$

ce qui donne $a = 0$ ou $a = 1$ et on conclut que les seules fonctions possibles solutions du problème sont : **la fonction nulle** et **l'identité**.