

SOLUTION

1) Notons I le centre du cercle inscrit au triangle ABC . L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles IAB , IBC et IAC . On obtient alors :

$$2S = P \cdot r \Leftrightarrow \frac{S}{P} = \frac{r}{2}$$

d'autre part,

$$2S' = 2\pi r^2 = P' r \Rightarrow \frac{S'}{P'} = \frac{r}{2}.$$

L'égalité est donc établie.

2) Supposons, par exemple, que le triangle ABC soit rectangle en A . Notons a , b , c les longueurs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.

D'après la question 1), on a :

$$\begin{aligned} r &= \frac{2S}{P} = \frac{bc}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{bc(b+c-\sqrt{b^2+c^2})}{(b+c)^2-b^2-c^2} \\ &= \frac{bc(b+c-\sqrt{b^2+c^2})}{2bc} = \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2} \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $b+c-\sqrt{b^2+c^2} = b+c-a$ est pair. (c'est un entier par hypothèse).

- si b et c sont pairs, alors $a^2 = b^2 + c^2$ est pair et a l'est également ainsi que $b+c-a$.
- si b et c sont de parités différentes, alors a^2 est impair, ainsi que a , et $(b+c)-a$ est pair en tant que différence de deux nombres impairs.
- le troisième cas (b et c impairs) est impossible, en effet, si b et c sont impairs, $b^2 + c^2$ est pair mais non multiple de 4 et ne peut être le carré d'un entier :

si a est un multiple de 4, a^2 est un multiple de 4
 si a est de la forme $4n + 1$, a^2 est de la forme $4N + 1$
 si a est de la forme $4n + 2$, a^2 est multiple de 4
 si a est de la forme $4n + 3$, a^2 est de la forme $4N + 1$.

Remarques :

1 - La question 2) pouvait être résolue sans utiliser la relation trouvée en 1).

Notons A_1 , B_1 et C_1 les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. On peut alors écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 x + y &= c \\
 x + z &= b \\
 y + z &= a.
 \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{cases}
 x = \frac{b + c - a}{2} \\
 y = \frac{a + c - b}{2} \\
 z = \frac{a + b - c}{2}
 \end{cases}$$

Or, dans le cas où le triangle ABC est rectangle en A , on montre facilement que le quadrilatère IB_1AC_1 est un carré de côté $x = r = \frac{b + c - a}{2}$ et on conclut comme précédemment.

2 - Deux candidats de l'Académie de Nancy-Metz ont utilisé l'écriture des triplets pythagoriciens :

$$\begin{aligned}
 a &= k(m^2 + n^2) \\
 b &= k(m^2 - n^2) \\
 c &= 2kmn.
 \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression du rayon r , obtenue en 2), on obtient :

$$r = \frac{b + c - a}{2} = km(m + n) \in \mathbb{N}.$$