

SOLUTION 1

“officielle”

Pour tout réel x positif, $(xf(x))$ est invariant par f . Il existe donc au moins un réel a invariant ; si a est invariant, on montre en utilisant la formule qu'il en est de même de l'inverse et des puissances de a . Si a est différent de 1 et invariant, une des deux

suites a^n ou $\left(\frac{1}{a}\right)^n$ tend vers l'infini et la limite de f en plus l'infini ne peut pas être

nulle, ce qui montre que seul 1 est invariant et que pour tout x , $xf(x) = 1$ et donc

$$\text{que } f(x) = \frac{1}{x}.$$

SOLUTION 2

(Pierre Andrieu)

- Si $x = y = 1$, on a $f(f(1)) = f(1)$.

Posons $f(1) = \alpha$. On obtient : $f(\alpha) = \alpha$, α est point fixe pour f .

- Si $x = 1$, $y = \alpha$, on a $f(f(\alpha)) = \alpha f(1)$ $f(\alpha) = \alpha^2$
Par suite, $\alpha^2 = \alpha$ d'où $\alpha = 1$ ($\alpha = 0$ exclu par hypothèse).

- Y a-t-il d'autres points fixes k ; $f(k) = k$?

$$\begin{aligned} \text{- Si } k > 1 \quad & \text{avec } x = y = k \quad f(kf(k)) = kf(k) \\ & f(k^2) = k^2 \\ & \text{et par récurrence } f(k^n) = k^n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} k^n = +\infty$, , ce qui contredit le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- Si $k < 1$ $k^n \rightarrow 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(k^n) = 0$.

Contradiction aussi, car l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ entraîne $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

En effet : $f(xf(y)) = yf(x)$.

Fixons x ; posons $X = xf(y)$

Si $y \rightarrow +\infty$, alors $X = xf(y) \rightarrow 0$ et $yf(x) \rightarrow +\infty$.

Ce qui se traduit par :

$$\lim_{X \rightarrow 0} f(X) = +\infty$$

Conclusion : Seul $k = 1$ est fixe pour f .

Pour terminer, avec $y = x$:

$$\begin{aligned} f(xf(x)) &= xf(x) \\ xf(x) \text{ est fixe pour } f \text{ donc } xf(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Commentaire :

Contrairement aux trois autres exercices, il me semble qu'il y a eu le souci de proposer aux élèves une « recherche progressive des propriétés » de f , donc de la solution.

Reste à savoir si ces derniers auront été capables de progresser en choisissant pour x et pour y des cas particuliers intéressants.

On ne s'intéresse plus vraiment, à l'heure actuelle, aux relations fonctionnelles, ni aux quantificateurs, alors je suis un peu sceptique quant à la réussite à cet exercice.

Dans les sujets nationaux, la situation proposée est moins abstraite- ce qui ne rend pas les sujets plus faciles - .

SOLUTION 3

On remarque que pour tout x , $xf(x)$ est invariant par f . L'idée est de montrer que seul 1 est invariant.

Si α et β sont invariants, $f(\alpha\beta) = f(\alpha f(\beta)) = \beta f(\alpha) = \beta\alpha$. donc $\alpha\beta$ est invariant.

• Si α est invariant : $f(1) = f(1/\alpha \cdot f(\alpha)) = \alpha f(1/\alpha)$ donc $f(1/\alpha) = f(1)/\alpha$

$$1 = (1/\alpha)f(\alpha) = f(\alpha \cdot f(1/\alpha)) = f(\alpha \cdot f(1)/\alpha) = f(f(1)) = f(1)$$

$$\text{donc } f(1/\alpha) = 1/\alpha.$$

S'il existe un réel a différent de 1 et invariant, on peut construire une suite croissante tendant vers l'infini d'éléments invariants : $n \rightarrow a^n$ ou $n \rightarrow (1/\alpha)^n$, ce qui est en contradiction avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc 1 est le seul invariant et pour tout x ,

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$