

SOLUTION

Soit : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
avec $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ entiers relatifs
un tel polynôme, s'il existe.

On devrait avoir : $f(1) = a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + \dots + a_1 1 + a_0$
 $f(2001) = a_n 2001^n + a_{n-1} 2001^{n-1} + \dots + a_1 2001 + a_0$

D'où $f(2001) - f(1) = a_n (2001^n - 1) + a_{n-1} (2001^{n-1} - 1) + \dots + a_1 (2001 - 1)$

Soit :
 $3001 - 2001 = a_n (2001 - 1)(2001^{n-1} + 2001^{n-2} + \dots + 1)$
 $+ a_{n-1} (2001 - 1)(2001^{n-2} + 2001^{n-3} + \dots + 1) + \dots + a_1 (2001 - 1)$

$$1000 = 2000A \text{ avec } A \in \mathbf{Z}$$

$$1 = 2A \text{ avec } A \in \mathbf{Z} \text{ ce qui est impossible.}$$

Conclusion : Il n'existe pas de tel polynôme.

Origine : Adaptation d'un exercice d'olympiade russe des années 1970