

1) Le point M a pour coordonnées : (x, y) .

U a pour coordonnées : $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}, y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $J\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}, y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Or $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc pour $1 < x < 7$, $x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ appartiennent à l'intervalle $]0 ; 8[$. En conséquence, les bords de l'abat-jour ne touchent pas les murs d'équation $x = 0$ et $x = 8$.

Les droites (UM) et (JM) ont respectivement 1 et (-1) pour coefficient directeur. La tangente en M à la rampe doit donc avoir un coefficient directeur strictement supérieur à (-1) et inférieur à 1 pour que l'abat-jour de la lampe ne touche pas la rampe.

L'équation de la rampe est $y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + \frac{19}{3}$, calculons la dérivée de la fonction

$$f : f(x) = \frac{1}{6}(x-4)^2 + \frac{19}{3} ; f'(x) = \frac{x-4}{3}.$$

Or, pour $1 < x < 7$, $-1 < f'(x) < 1$, soit le coefficient directeur de la tangente à la rampe appartient bien à l'intervalle $] -1, 1[$.

Conclusion : pour $1 < x < 7$, la lampe ne touche ni les murs ni la rampe.

2) et 3)

Faisons le calcul dans le cas général $1 < x < 7$.

Nous introduirons le point N $(x, 0)$.

L'aire cherchée est alors la somme des aires des deux trapèzes OBMN et NMCD.

Donnons les coordonnées des points utilisés :

$$O(0 ; 0) ; B(0 ; y - x) ; M(x ; y) ; N(x ; 0) ; C(8 ; y + x - 8) ; D(8 ; 0).$$

L'aire cherchée est donc : $A(x) = [(2y - x)x + (2y + x - 8)(8 - x)]/2$,

soit encore : $A(x) = -x^2 + 8(x + y) - 32$.

$$\text{Or } y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + \frac{19}{3}, \text{ donc } A(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 40.$$

Pour $x = 3$ on obtient alors $A(3) = 35$.

Pour l'aire maximale, on cherche les extréma de A. $A'(x) = \frac{2x-8}{3}$ s'annule pour

$x = 4$, est d'abord négative puis positive, donc $x = 4$ correspond à un minimum. Nous voulons une aire maximale. Etant donné la symétrie de la figure par rapport à la droite d'équation $x = 4$, l'aire maximale de la zone éclairée sera obtenue pour $x = 1$ ou $x = 7$.

$$\text{Nous aurons alors } A = \frac{113}{3}.$$

Commentaires :

Environ 140 élèves se sont présentés.

Le sujet a été en partie traité par la plupart des candidats. Il alliait géométrie de collège avec analyse niveau 1^{ère} S.

La première question n'a en général pas été comprise : la plupart des élèves ont regardé ce qui se passait en 1 et en 7, mais pas entre les deux. Beaucoup ont vérifié le fait que l'abat-jour ne touche pas les murs.

Environ 15 élèves sur les 140 ont pensé à calculer la dérivée, une dizaine ont traité cette question correctement.

La deuxième question, par contre, a été en général menée jusqu'au bout, par des découpages parfois très surprenants (je dirais 90% de réussite).

La troisième n'a pas toujours été abordée et n'a été menée jusqu'au bout que par une petite dizaine d'élèves. L'interprétation des résultats trouvés dans la recherche d'extréma n'a été réussie que par trois ou quatre élèves, les autres ayant oublié en cours de route ce qui était demandé.

Je pense que cet exercice était bien choisi, couvrant une bonne partie du programme d'analyse de première, permettant de manipuler avec le cas particulier de la deuxième question, les élèves ne restaient donc pas « secs ».