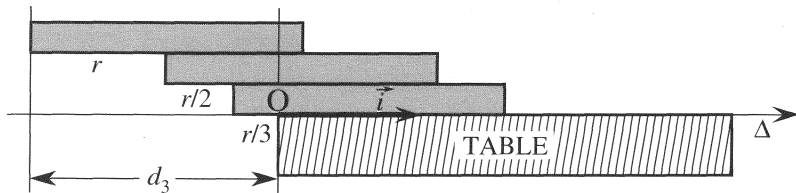


SOLUTION



1°) Appelons S_3 le solide constitué des trois pièces, installé au bord de la table.

Soit $\mathbf{P}$ le plan défini par le “dessus” de la table. Les projetés orthogonaux sur $\mathbf{P}$, des centres d'inertie des trois pièces sont alignés sur la droite Δ que nous rapportons au repère $(O ; \vec{i})$ où $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$.

Les abscisses x_1, x_2, x_3 de ces trois projetés orthogonaux sont respectivement

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1; \quad x_3 = -\frac{1}{3} + 1.$$

L'abscisse g_3 du centre d'inertie G_3 de S_3 est, en appelant m la masse commune des trois pièces de monnaie : $g_3 = m \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3m} = 0$.

Ainsi S_3 est bien en équilibre. (instable !)

2°) Les notations de cette question généralisent les précédentes.

a) Le solide S_{n-1} étant donné, on suppose $g_{n-1} = 0$. Glissons au ras de la table une $n^{\text{ème}}$ pièce. L'abscisse de son centre d'inertie est $x_n = 1$. L'abscisse g'_n du centre d'inertie du solide S'_n ainsi constitué est :

$$g'_n = \frac{(n-1)g_{n-1} + 1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Le solide S_n est obtenu à partir du solide S'_n par translation de vecteur $-\frac{1}{n} \vec{i}$. Par conservation du barycentre, on obtient bien $g_n = 0$, d'où le résultat.

b) Par définition même de l'empilage, $d_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel $n > 1$.

$$d_{2n} - d_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

c) Avec $n = 2$, on obtient immédiatement :

$$d_{2^2} - d_1 = d_4 - d_2 + d_2 - d_1 \geq 2 \frac{1}{2}$$

Supposons alors $d_{2^p} - d_1 \geq \frac{p}{2}$; il vient :

$$d_{2^{p+1}} - d_1 = d_{2^{p+1}} - d_{2^p} + d_{2^p} - d_1 \geq \frac{1}{2} + \frac{p}{2} = \frac{p+1}{2}.$$

On obtient ainsi $d_{2^p} \geq \frac{p}{2} + 1$. Une longueur L , entière, étant donnée, il suffit donc, pour que le surplomb soit de longueur plus grande que L , que $n \geq 2^{2L-2}$.

NDLR : cf. livre paru depuis : « *La notion d'infini* » de Thérèse Gilbert et Nicolas Rouche, éditions Ellipses, en son paragraphe « l'infini sur un tas de planches », p. 89 et suivantes.