

Quelles sont les solutions de cette équation? Expliquer.

[illegible]

A PROPOS DE CET EXERCICE

Comme il était naturel, une partie des candidats s'est attaqué à la longue série de calculs qui mène, après 29 étapes, à l'égalité :

$$x = \frac{832\,040x + 514\,229}{514\,229x + 317\,811}$$

La forme de l'équation du second degré équivalente :

$$(1) \quad 514229x^2 - 514229x - 514229 = 0$$

et sa simplification en $x^2 - x - 1 = 0$ (1) a fait comprendre à certains (mais pas à tous) qu'ils étaient passés à côté d'une « astuce »...

D'autres se sont rapidement rendu compte que les équations obtenues en se limitant à un petit nombre de barres de fractions étaient toutes équivalentes à l'équation (1). Certains l'ont admis sans autre forme de procès mais un candidat l'a très

correctement justifié en remarquant, comme dans une récurrence, que les dénominateurs successifs étaient de la forme : $\frac{ax+b}{bx+d}$ avec $a = b + d$ et que cette forme se transmettait à l'étape suivante.

Enfin, quelques candidats ont abordé le problème « par le haut » en observant que la fraction s'obtenait par l'itération de la relation $x = 1 + \frac{1}{x}$ et qu'il suffisait de résoudre cette seule équation.

Cette équation inhabituelle par le nombre de traits de fractions, était pourtant abordable par tous et a permis à plusieurs candidats de mettre en évidence des qualités de recherche (essais, tâtonnements, idées !) indéniables. En tant qu'équation du second degré, elle admet deux racines de signes opposés, dont la solution positive, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ n'est autre que *le nombre d'or*, (comme un candidat l'a d'ailleurs repéré). Indiquons enfin qu'une itération infinie fait apparaître un objet mathématique de nature différente, le développement en *fraction continue* de φ , dont les coefficients sont donnés par $[1, .1, .1, \dots]$.