

1. Si $\overline{abcd} - \overline{dcba} : = 2000$

alors $1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = 2000$

et $d = a$ d'où $90(b - c) = 2000$, ce qui est impossible puisque 2000 n'est pas multiple de 9.

Si $\overline{abcd} - \overline{dcba} : = 2001$ alors $a > d$ soit $d = 0$ et $a = 9$.

$1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = 2001$

soit $999(a - d) + 90(b - c) = 2001$

comme $d = 0$ et $a = 9$

$8991 + 90(b - c) = 2001$ soit $90(b - c) = -6990$ soit $9(b - c) = -699$

or 699 n'est pas divisible par 9.

2. Posons $\overline{abcd} - \overline{dcba} = \overline{2xyz}$ soit :

$1000(a - d) + 100(b - c) + 10(c - b) + (d - a) = 2000 + 100x + 10y + z$

$\Rightarrow 999(a - d) + 90(b - c) = 2000 + 100x + 10y + z.$

On a donc $a > d$ et, en observant les unités, $10 + d - a = z$,

donc $a - d = 10 - z$.

Au niveau des dizaines, soit $c \geq b + 1$, soit $c < b + 1$.

a) Si $c \geq b + 1$ alors $c - b - 1 = y$ (qui impose $y \leq 8$ car $b - c \leq 9$)

Ainsi : $999(10 - z) + 90(-1 - y) = 2000 + 100x + 10y + z$

$\Rightarrow 7900 = 100x + 100y + 1000z \quad \Rightarrow \quad 10z + x + y = 79$

• Si $x + y > 9$ $10(x + 1) + (x + y - 10) = 70 + 9$

donc $x + y - 10 = 9$ et $z + 1 = 7$.

Soit $x + y = 19$, ce qui est impossible.

- Si $x + y \leq 9$ alors $z = 7$ et $x + y = 9$ avec $y \leq 8$ soit $x \leq 1$.

Cela donne nécessairement 9 possibilités :

2187, 2277, 2367, 2457, 2547, 2637, 2727, 2817, 2907.

- b) Si $c < b + 1$ alors $10 + c - b - 1 = y$ et donc $b - c = 9 - y$

Ainsi, $999(10 - z) + 90(9 - y) = 2000 + 100x + 10y + z$

$$\Rightarrow 8800 = 1000z + 100y + 100x \quad \Rightarrow \quad 88 = 10z + x + y.$$

- Si $x + y \leq 9$ alors $z = 8$ et $x + y = 8$

Cela donne 9 possibilités :

2088, 2178, 2268, 2358, 2448, 2538, 2628, 2718, 2808.

- Si $x + y > 9$ alors $88 = 10(z + 1) + (x + y - 10)$

donc $z = 7$ et $z + 1 = 18$. Cela impose $x = y = 9$ et $z = 7$

et donne uniquement : 2997.

Conclusion : les années cherchées sont nécessairement parmi les 19 possibilités :

2187, 2277, 2367, 2457, 2547, 2637, 2727, 2817, 2907, 2088, 2178, 2268, 2358, 2448, 2538, 2628, 2718, 2808, 2997.

Réciproquement :

Pour les 9 premiers cas, utilisons : $a - d = 10 - z = 3$ et $c - b = y + 1$.

$$2187 = 4091 - 1904 = 5092 - 2905 = 6093 - 3609 = \dots$$

$$2277 = 4081 - 1804 = \dots \quad 2367 = 4071 - 1704 = \dots$$

$$2457 = 4061 - 1604 = \dots \quad 2547 = 4051 - 1504 = \dots$$

$$2637 = 4041 - 1404 = \dots \quad 2727 = 4031 - 1304 = \dots$$

$$2817 = 4021 - 1204 = \dots$$

$$2907 = 4011 - 1104 = \dots$$

Pour les 9 suivants, utilisons : $a - d = 10 - z = 2$ et $b - c = 9 - y = 1 + x$.

$$2088 = 3101 - 1013 = 4102 - 2014 = 5103 - 3015 = \dots$$

$$2178 = 3201 - 1023 = \dots \quad 2268 = 3301 - 1033 = \dots$$

$$2358 = 3401 - 1043 = \dots \quad 2448 = 3501 - 1053 = \dots$$

$$2538 = 3601 - 1063 = \dots \quad 2628 = 3701 - 1073 = \dots$$

$$2718 = 3801 - 1083 = \dots \quad 2808 = 3901 - 1093 = \dots$$

Pour le dernier, $a - d = 3$ et $b - c = 0$.

$$2997 = 4001 - 1004 = 5002 - 2005 = \dots$$

SOLUTION 2

Posons $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 2xyz$, ainsi :

$$2001 \leq 999(a-d) + 90(b-c) \leq 2999.$$

Or $a > d$ donc $1 \leq a-d \leq 9$.

De plus $-9 \leq b-c \leq 9$ d'où

$$999(a-d) - 9 \times 90 \leq 999(a-d) + 90(b-c) \leq 999(a-d) + 909$$

$$2001 \leq 999(a-d) + 90(b-c) \leq 999(a-d) + 90 \times 9$$

donc : $2001 \leq 999(a-d) + 810$

donc nécessairement $1 < \frac{1191}{999} \leq a-d$.

De même $999(a-d) - 9 \times 90 \leq 2999$ donc $a-d \leq 3809/999 < 4$

Donc nécessairement $a-d=2$ ou $a-d=3$.

1. Si $a-d=2$:

$$2001 \leq 999 \times 2 + 90(b-c) \leq 2999$$

$$\text{soit } 2001 - 1998 \leq 90(b-c) \leq 2999 - 1988$$

$$\text{d'où } \frac{3}{90} \leq b-c \leq \frac{1002}{90}, \text{ soit } 1 \leq b-c \leq 9.$$

Il y a donc 9 résultats possibles.

Par exemple : $a=2, d=0, b=2$ et $c=1$ donnent : $2210 - 0122 = 2088$ etc.

2. Si $a-d=3$:

$$2001 \leq 999 \times 3 + 90(b-c) \leq 2999$$

$$\text{soit } 2001 - 2997 \leq 90(b-c) \leq 2999 - 2997$$

$$\text{d'où } -9 \leq b-c \leq 0.$$

Il y a donc 10 résultats possibles.

Il reste à vérifier si les 19 nombres obtenus conviennent.