

SOLUTION

1. Ensorceler un nombre x , c'est calculer $\frac{3x-5}{x+1}$.

$$\text{Soit } f(x) = \frac{3x-5}{x+1}.$$

$$\text{Alors } f^2(x) = \frac{x-5}{x-1}; f^3(x) = \frac{x+5}{3-x}; f^4(x) = x \dots$$

$$\text{Donc } f^{2000} = x.$$

2. On ne peut pas « ensorceler » (-1) puisqu'il n'est pas dans le domaine de définition de f . De même 1 n'est pas dans celui de f^2 et 3 n'est pas dans celui de f^3 . (-1) , 1 et 3 sont les trois nombres qui ne pourront pas être ensorcelés 2000 fois.

Généralisation :

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+1}; f^2(x) = \frac{(a^2+b)x+ab+b}{(a+1)x+b+1}$$

$$f^3(x) = \frac{(a^3+2ab+b)x+a^2b+b^2+ab+b}{(a^2+a+b+1)x+ab+2b+1}$$

$$f^4(x) = \frac{(a^4+3a^2b+b^2+2ab+b)x+a^3b+2ab^2+2b^2+a^2b+ab+b}{(a^3+a^2+2ab+2b+a+1)x+a^2b+2ab+b^2+3b+1}$$

$a = 3 \text{ et } b = -5$ donc $f^4(x) = x.$
--

(inspiré du problème n° 200 paru dans Le Monde du 5/12/2000)