

SOLUTION

Soit, à chaque partie, x le gain du premier, y celui du second et z celui du troisième ($0 < z < y < x$) et N le nombre de parties.

$$N(x + y + z) = 20 + 10 + 9 = 39 \text{ donc}$$

$$N = 1 \quad \text{et} \quad x + y + z = 39$$

$$\text{ou} \quad N = 3 \quad \text{et} \quad x + y + z = 13$$

$$\text{Pour } N = 1 \quad x = 20 \dots$$

Pour $N = 3$, on cherche 3 entiers rangés dans l'ordre croissant, de somme 13 et distincts deux à deux :
(1, 2, 10) ; (1, 3, 9) ; (1, 4, 8) ; (1, 5, 7) ; (2, 3, 8) ;
(2, 4, 7) ; (2, 5, 6) ; (3, 4, 6).

Avec (1, 2, 10) impossible de trouver une somme égale à 20. Il en va de même pour (1, 3, 9) ; (1, 5, 7) ; (2, 3, 8) ; (2, 4, 7) ; (2, 5, 6) et (3, 4, 6)

La seule solution est donc : $x = 8$, $y = 4$ et $z = 1$.

Source : *Olympiades 1974.*