

SOLUTION

1) et 2) : On peut envisager deux méthodes pour répondre à ces deux premières questions.

Première méthode : Elle consiste à représenter un arbre où figurent les différentes possibilités de score. Etant donné le nombre important de cas pour une partie de dix balles, on ne peut raisonnablement envisager cette méthode que pour répondre à la première question (partie en 5 balles) :

- 5 branches conduisent au score de 3 à 2 ;
- 4 branches conduisent au score de 4 à 1 ;
- 1 branche conduit au score de 5 à 0.

Il y a donc au total 10 fiches possibles pour une partie en 5 balles.

Deuxième méthode : Elle consiste à calculer de proche en proche le nombre de possibilités pour qu'Alain gagne sur le score de n à p sans que Benoît ne mène jamais au score.

	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	2			
3	1	3	5	5		
4	1	4	9	14	14	
5	1	5	14	28	42	42
6	1	6	20	48	90	
7	1	7	27	75		
8	1	8	35			
9	1	9				
10	1					

On construit un tableau dans lequel figure à la ligne n et à la colonne p (p étant un entier compris entre 0 et n) le nombre de parties gagnées par Alain sur le score de n à p sans que Benoît ne mène jamais au score.

Alain n'a qu'une seule possibilité de gagner sur le score de n à 0, ce qui explique la présence de 1 sur la première colonne.

Pour qu'Alain l'emporte sur le score de n à p (avec $1 \leq p < n$), il faut qu'après l'avant-dernière balle, le score soit de n à $p - 1$ ou de $n - 1$ à p . Par exemple, pour qu'Alain l'emporte sur le score de 6 à 3, il faut qu'après l'avant-dernière balle, le score soit de 6 à 2 ou de 5 à 3. Alors le nombre de possibilités pour que le score final soit de 6-3 est égal à la somme du nombre de possibilités pour que le score soit de 6-2 et du nombre de possibilités pour que le score soit de 5-3. Ainsi, pour obtenir le nombre situé à la ligne n et à la colonne p , on additionne le nombre figurant à la ligne n et à la colonne $p - 1$ au nombre figurant à la ligne $n - 1$ et à la colonne p (exemple : $48 = 20 + 28$ en ligne 6, colonne 3).

Enfin, pour qu'il y ait égalité n - n , il faut qu'après l'avant-dernière balle, le score soit de n à $n - 1$ pour Alain et Benoît doit obligatoirement marquer le dernier but. Donc le nombre figurant à la ligne n et à la colonne n est égal au nombre figurant à la même ligne de la colonne précédente.

Ces considérations permettent de remplir de proche en proche les cases du tableau précédent.

- On obtient le nombre de fiches possibles pour une partie en 5 balles où Benoît ne mène jamais au score en additionnant les nombres correspondant à un score de 5-0, 4-1 ou 3-2.

On obtient ainsi : $1 + 4 + 5 = 10$ fiches possibles.

- On obtient le nombre de fiches possibles pour une partie en 10 balles où Benoît ne mène jamais au score en additionnant les nombres correspondant à un score de 10-0, 9-1, 8-2, 7-3, 6-4 ou 5-5.

On obtient ainsi : $1 + 9 + 35 + 75 + 90 + 42 = 252$ fiches possibles.

3) On note u_n le nombre de fiches où Benoît n'a jamais mené au score dans une partie à n balles. Comme n est pair, Alain mène après la $(n - 1)$ -ième balle et la dernière balle peut donc être gagnée soit par Alain soit par Benoît. Chaque fiche a $n - 1$ balles donne donc deux fiches à n balles.

Donc : $u_n = 2u_{n-1}$.

On note v_n le nombre de fiches où Benoît n'a ni mené au score ni égalisé dans une partie à n balles. Dans une telle partie, Alain marque le premier but et la fiche constituée de la deuxième à la dernière balle correspond à une partie à $n - 1$ balles où Benoît peut au mieux égaliser, mais sans jamais mener au score.

Donc $v_n = u_{n-1} = \frac{u_n}{2}$. Le nombre de parties où Benoît n'a jamais mené au score,

mais égalisé au moins une fois est donc : $u_n - v_n = \frac{u_n}{2} = \frac{N}{2}$.

COMMENTAIRES

La question 1) a été abordée par de nombreux candidats et a été souvent bien traitée.

Les questions 2) et 3) étaient plus compliquées. On dénombre néanmoins plusieurs bonnes réponses. Les méthodes utilisées par les candidats sont voisines de la solution proposée. Une autre méthode consiste à raisonner de la façon suivante : on désigne par u_n le nombre de fiches possibles pour une partie en n balles où Benoît n'a jamais mené au score et par v_n le nombre de ces fiche où la partie se termine à égalité de points.

Alors $u_n = 2(u_{n-1} - v_{n-1}) + v_{n-1} = 2u_{n-1} - v_{n-1}$. On ramène ainsi le problème à la détermination de v_n . Lorsque n est impair, il est clair que $v_n = 0$. On démontre (mais cette démonstration fait appel à des outils mathématiques plus élaborés) que si n est

pair, c'est-à-dire de la forme $n = 2p$ avec p entier, alors : $v_n = v_{2p} = \frac{1}{p+1} C_{2p}^p$ où C_{2p}^p

est le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi $2p$ (voir programme de terminale).

Ces entiers v_{2p} sont appelés **Nombres de Catalan**(*).

(*) La Société Belge des Professeurs de Mathématiques édite une belle brochure sur Eugène Catalan. Prix : 9,92 € + port : 2,97 €