

SOLUTION

Par permutation sur x, y, z on peut supposer, sans restreindre la généralité de la question, que $1 \leq x \leq y \leq z$, donc $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ ce qui entraîne :

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x} \text{ soit } x \leq 3 \text{ donc } x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 3.$$

Premier cas : $x = 1$. C'est impossible car cela implique : $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Deuxième cas : $x = 2$, d'où $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ or $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y}$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{y}$

donc $y \leq 4$.

- Si $y = 4$ alors $z = 4$ d'où la solution $(2, 4, 4)$.
- Si $y = 3$ alors $z = 6$ d'où la solution $(2, 3, 6)$.

- Si $y = 2$ ou $y = 1$, c'est impossible car $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$.

Troisième cas : $x = 3$ d'où $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ or $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y}$ donc $\frac{2}{3} \leq \frac{2}{y}$

donc $y \leq 3$.

- Si $y = 3$ alors $z = 3$ d'où la solution $(3, 3, 3)$.

Comme $x \leq y$, c'est fini.

Source : Algèbre I. Arnaudès Fraysse. Exercice n°4 page 84.