

SOLUTION

Il s'agit à proprement parlé de combinatoire booléenne ou plus généralement de programmation linéaire en entiers positifs ou nuls. La correction proposée ci-dessous ne se réfère qu'à de la réflexion et des connaissances élémentaires.

a)

Le nombre de clients ayant acheté *au moins* l'un des deux de P ou de M est égal à la somme du nombre de P vendus et du nombre de M vendus, moins le nombre de clients ayant acheté P et M.

L'étude sur une colonne suffit à expliciter la forme générale du raisonnement :

le lundi, ceux qui ont acheté P et M ne peuvent être au maximum que 634 et au minimum $857 + 634 - 875 = 616$.

Pour la même raison, ceux qui ont acheté L et (P et M) ne peuvent être au maximum que 634 et au minimum $832 + 616 - 875 = 573$.

La forme combinatoire générale du raisonnement tient au fait que pour A_1, A_2 deux parties de E , le tout de cardinal respectif a_1, a_2, e ,

de cardinal $(A_1 \cap A_2) = \text{cardinal}(A_1) + \text{cardinal}(A_2) - \text{cardinal}(A_1 \cup A_2)$,

il résulte que $(a_1 + a_2) - e \leq \text{cardinal}(A_1 \cap A_2) \leq \inf(a_1, a_2)$,

(où $-$ désigne la soustraction dans $\mathbb{N}$: $x - y = \frac{x - y + |x - y|}{2}$)

Situation qui s'étend à $A_1, A_2, \dots, A_n$ parties de E : le cardinal de $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ peut et ne peut que prendre les valeurs de l'intervalle :

$$[(\sum a_i)' - (n-1)e, \inf(a_1, a_2, \dots, a_n)]$$

b) Notons respectivement p, l, m et c les nombres d'acquéreurs de P, de L, de M et de clients (C) pour un même jour.

Dans notre cas, $m \leq l \leq p$ (et évidemment $\leq c$).

Ceux qui ont acheté (au moins) P et L peuvent et ne peuvent être qu'en nombre compris entre $(p+l)' - c$ et l (cf. a)).

Supposons donc ce nombre fixé par une de ces valeurs q .

Le minimum recherché dans ce cas est donc supérieur ou égal à q .

Ce minimum I_q du nombre d'acquéreurs d'au moins deux de ces trois quotidiens sera alors atteint si un maximum d'acquéreurs de M se trouve être :

1) Soit des clients ayant acheté P et L,

(ils sont, de toute façon, en nombre q dans notre cas).

2) Soit des clients n'ayant acheté ni P ni L,

(ils sont, de toute façon, en nombre $(c+q) - (p+l)$)

Ce qui s'exprime par :

si $m \leq q + (c+q) - (p+l)$ alors $I_q = q$;

si $m > q + c + q - (p+l)$ alors $I_q = q + m - (q + (c+q) - (p+l))$.

Qui en fait n'exprime rien d'autre que

$$I_q = \text{Sup}(q, (p+l+m) - (c+q)).$$

Le minimum général recherché I , est donc le minimum atteint par I_q lorsque q appartient à l'intervalle $[(p+l)' - c, l]$.

Une petite étude comparative des fonctions affines

$f(x) = x$ et $g(x) = (p+l+m) - (c+x)$ sur l'intervalle $[(p+l)' - c, l]$

conduit à : I est le plus petit entier positif ou nul supérieur ou égal à :

$$\frac{1}{2}(p+l-c + \text{Sup}(p+l-c, m)).$$

Ainsi, le minimum du nombre de clients ayant acheté au moins deux de ces quotidiens est :

le lundi :	814	le mardi :	719
le mercredi :	820	le jeudi :	640
le vendredi :	687	le samedi :	815